

Adil SALIM

Ensaë 3<sup>e</sup> Année  
Stage de fin d'études  
Année scolaire 2014 - 2015

Calcul stochastique libre :  
processus à accroissements libres

CREST-LS (Malakoff MK1)  
Pierre Alquier

Philippe Biane  
1 Juin 2015 - 4 septembre 2015

# Contents

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Remerciements</b>  | <b>3</b>  |
| <b>2</b> | <b>Note de synthèse</b>   | <b>4</b>  |
| <b>3</b> | <b>Introduction</b>   | <b>7</b>  |
| <b>4</b> | <b>Variables aléatoires non commutatives</b>                          | <b>8</b>  |
| 4.1      | Point de vue algébrique . . . . .                                     | 8         |
| 4.2      | Topologies localement convexes sur $L(\mathbf{H})$ . . . . .          | 8         |
| 4.3      | Calcul fonctionnel et théorème spectral pour les opérateurs unitaires | 9         |
| 4.4      | C*-algèbres et calcul fonctionnel continu . . . . .                   | 12        |
| 4.5      | Algèbres de Von Neumann et calcul fonctionnel mesurable . . . . .     | 13        |
| <b>5</b> | <b>Liberté</b>  | <b>16</b> |
| 5.1      | Point de vue analytique . . . . .                                     | 16        |
| 5.2      | Définition de la relation de liberté . . . . .                        | 17        |
| 5.3      | Partitions non croisées . . . . .                                     | 18        |
| 5.3.1    | Partition complémentaire . . . . .                                    | 20        |
| 5.4      | Approche combinatoire de la liberté . . . . .                         | 21        |
| 5.5      | Approche analytique : convolution multiplicative libre . . . . .      | 22        |
| <b>6</b> | <b>Processus à accroissements libres</b>                              | <b>24</b> |
| 6.1      | Résultat fondamental . . . . .  | 24        |
| 6.2      | Application aux processus à accroissements libres . . . . .           | 31        |
| 6.3      | Application aux grandes matrices aléatoires . . . . .                 | 34        |
| <b>7</b> | <b>Analyse et réflexion sur le contexte et les outils utilisés</b>    | <b>38</b> |
| <b>8</b> | <b>Conclusion</b>   | <b>39</b> |

# Chapter 1

## Remerciements

Je tiens à remercier chaleureusement Philippe Biane pour m'avoir proposé ce beau sujet. Il m'a permis d'élargir ma culture et de l'approfondir dans mes thématiques favoris. Je tiens à remercier également Pierre Alquier pour avoir été mon tuteur cette année et dans deux de mes stages. Merci de m'avoir couvert et de m'avoir conseillé pour négocier les virages délicats. Je remercie ceux qui ont de près ou de loin contribué à la rédaction de ce document, Riyad Abass, Maxime Février, Clément Puppo, Mehdi Sebbar et plus généralement le labo de stats du CREST. A ma mère qui m'a supporté jusqu'à la fin de mes études, Irfane, Aicha, la minuscule Naïma et le petit Seeethyyy...

## Chapter 2

# Note de synthèse

The main purpose of this report is to precisely define what is a limit when the size goes to infinity of independent random matrices. One can immediately imagine the applications for the statistician storing in a matrix big data. In the spirit of noncommutative geometry, the definition involves fundamentally non commutativity of the product between matrices. Indeed, asymptotically, the independence disappears in favor of a new relationship called "freedom", which is the relevant relationship to study noncommutative variables.

The noncommutative probability way of thinking reflects the noncommutative geometry way of thinking : we try to find how become functions defined on commutative spaces when they are defined on noncommutative spaces. Thus, we have to define  $f(x)$  when  $f$  is a classical function and  $x$  is an element of a noncommutative space. An important kind of noncommutative objects in mathematics are operators in complex Hilbert spaces. Moreover, if  $x$  is a normal operator and  $f$  a continuous or mesurable function on the spectrum of  $x$ , the expression  $f(x)$  makes sense. Actually, to define  $f(x)$  when  $f$  is continuous, we extend the homomorphism  $P \mapsto P(x)$  by density of polynomial functions in continuous functions on the spectrum of  $x$ .

By using the noncommutative geometry way of thinking, we think  $x$  as a noncommutative random variable, and this let us compute some mesurable transformations of  $x$ ,  $f(x)$ . This is reminiscent of the fact that in probability theory, we compute mesurable transformations of random variables  $X$ ,  $f(X)$ . This key point let us do free probability theory : probability theory with noncommutative random variables. "Noncommutative random variables" are (determinist) operators on a Hilbert space, and we study them using probabilistic intuition. Therefore, we can now understand why free probability theory was introduce by studying operator algebras. However, studying operator algebras, D. Voiculescu found in the early 90' that independant hermitian random matrices with infinite size shows a specific relationship, different from independance, that rises in free probability theory : freeness. Then, probabilists started to study free probability theory.

All important concepts of classical probability theory, like distribution, convergence or conditional expectation have a "free" analogous. For example, "independance" between commutative random variables become "freeness" between noncommutative random variables. Freeness is the central and deepest concept of free probability. Two "noncommutative random variables"  $x$  and  $y$

are free if they are "highly noncommutative" : if they were commutative (i.e  $xy = yx$ ) they were trivial. In free probability, we study commutativity between operators (which is an algebraic problem) by studying freeness (and then using the probabilistic intuition of independance). But, knowing more about freeness could be interesting for a statistician studying large matrices (arising for example when stocking a lot of high dimensional data in a matrix). And an important free probability way of thinking is to apply what we show about free random variables in the context of large random matrices, and we will do this at the end of this report. We could have shown the "central limit theorem of random matrices" (concerning the limit law of the spectrum) from the free central limit theorem.

Le principal but de ce rapport est de définir précisément ce qu'est une limite quand la taille tend vers l'infini de matrices aléatoires indépendantes. On peut immédiatement en imaginer les applications pour le statisticien qui stocke dans une matrice des données volumineuses. Dans l'esprit de la géométrie non commutative, la construction fait intervenir de manière fondamentale la non commutativité du produit matriciel. En effet, asymptotiquement la relation d'indépendance disparaît au profit d'une nouvelle relation, la relation de liberté, qui est la relation pertinente pour l'étude de variables non commutatives.

Les probabilités non commutatives s'inscrivent dans une démarche générale en géométrie non commutative : on essaye de transporter des propriétés de fonctions définies sur des espaces commutatifs (typiquement  $\mathbf{R}$  ou  $\mathbf{C}$ ) en des propriétés de ces mêmes fonctions définies sur des espaces non commutatifs (où le produit n'est pas commutatif). Pour cela, il convient de pouvoir donner un sens à  $f(x)$  où  $f$  est une fonction au sens classique et où  $x$  "vit" dans un espace non commutatif. En mathématiques, les matrices complexes et plus généralement les opérateurs continus sur un espace hilbertien complexe sont des objets non commutatifs bien connus. Il se trouve que si  $x$  est un opérateur normal continu (qui commute avec son adjoint), on peut donner un sens à  $f(x)$  dès que la fonction  $f$  est continue ou plus généralement mesurable sur le spectre de  $x$ . Cela se fait essentiellement en prolongeant par continuité le morphisme  $P \mapsto P(x)$  où  $P$  est un polynôme.

La théorie des probabilités classique se base sur la théorie de la mesure. On y utilise abondamment des transformations mesurables de la variable aléatoire  $X$ , notés  $f(X)$ . En adoptant la démarche décrite en géométrie non commutative, on peut imaginer que  $X$  est un élément d'un espace non commutatif et donner un sens à  $f(X)$ . La théorie des probabilités libres se propose de développer une théorie des probabilités non commutatives à partir de cette idée : les variables aléatoires "non commutatives" sont des éléments (déterministes !) d'un espace non commutatif, et on les étudie en utilisant des intuitions probabilistes. Tout cela est possible parce qu'on peut faire du calcul fonctionnel mesurable.

Pourquoi ajouter l'adjectif "libre"? Simplement parce que toutes les notions importantes de probabilités classiques se transportent sans heurt au cadre non commutatif sauf la notion d'indépendance de variables aléatoires. Cette notion est remplacée par la notion de liberté, qui donne son caractère non trivial et intéressant à l'étude. Intéressant d'une part dans l'étude générale des algèbres d'opérateurs, car dire que deux variables aléatoires non commutatives sont libres signifie heuristiquement qu'elles sont hautement non commutatives (des "variables aléatoires non commutatives" libres qui commutent sont triviales),

et d'autre part (le plus important pour le statisticien) en théorie des matrices aléatoires. En effet, on voit apparaître la relation de liberté entre des matrices aléatoires hermitiennes indépendantes de taille tendant vers l'infini. C'est ainsi que, par exemple, on peut montrer le "théorème central limite des matrices aléatoires" (concernant la loi limite des valeurs propres) à partir du théorème central limite libre. C'est une démarche générale en probabilités libres : essayer de transporter les théorèmes aux matrices aléatoires de grande taille. Cela ouvre la porte à des applications en statistiques lorsque l'on stocke de grands jeux de données (en nombre et en taille) dans des matrices.

# Chapter 3

## Introduction

”In short, the idea is to make algebra the foundation of the theory [of probability], as opposed to other possible choices of foundations such as sets, measures, categories, etc..” Voilà comment T. Tao choisit de résumer ce que sont les probabilités libres.

Les probabilités libres ont été introduites pour la théorie des groupes par D. Voiculescu autour de 1983. Elles utilisent un formalisme basé sur les algèbres d’opérateurs pour développer une théorie des probabilités *non commutatives*. Elles ne sont pas basées sur la théorie de la mesure mais adapte les concepts de théorie des probabilités *classiques* dans ce nouveau cadre.

Au début des années 90, D. Voiculescu utilise les probabilités libres en théorie des grandes matrices aléatoires dans l’article fondateur [4]. Il y montre comment la relation d’indépendance entre des matrices aléatoires est remplacée par la relation de liberté, quand la taille des matrices tend vers l’infini. La relation de liberté est l’analogie pertinente de l’indépendance dans le cadre non commutatif.

De la même manière que les probabilités sont une théorie de l’indépendance entre des variables aléatoires commutatives, les probabilités libres sont une théorie de la liberté entre des variables aléatoires non commutatives.

L’étude qui suit porte plus précisément sur un sujet de calcul stochastique libre basé sur l’article [1] de P. Biane. Vu l’importance qu’ont les processus à accroissements indépendants en calcul stochastique, tels que le mouvement brownien, et plus généralement les processus de Lévy, le calcul stochastique libre s’intéresse naturellement aux processus à accroissements libres. Cette étude repose de manière fondamentale sur des propriétés de l’espérance conditionnelle ”libre.”

Nous commencerons par introduire la modélisation qui permet d’introduire les variables aléatoires non commutatives. Puis nous nous intéresseront à la relation de liberté et montrerons comment des objets combinatoires et analytiques interviennent dans cette étude. Nous démontrerons ensuite un théorème important d’après [1], dont l’analogie classique résulte d’une propriété de l’espérance conditionnelle. Ce théorème, qui concentre la difficulté de l’étude générale des processus à accroissements libres, sera utilisé de deux manières différentes. D’une part, en calcul stochastique libre, pour établir un lien entre les processus de Markov classiques et les processus à accroissements libres. D’autre part en théorie des grandes matrices aléatoires, d’après une remarque de [2], pour connaître les vecteurs propres d’une matrice unitaire déformée de grande taille.

## Chapter 4

# Variables aléatoires non commutatives

On commence par introduire les concepts qui permettent de faire des probabilités libres.

### 4.1 Point de vue algébrique

Soit  $\mathcal{A}$  une  $\mathbf{C}$ -algèbre unitaire et soit  $1$  son unité. Soit  $\tau$  une forme linéaire sur  $\mathcal{A}$  telle que  $\tau(1) = 1$ . Les éléments de  $\mathcal{A}$  seront, en probabilités libres, l'analogie des variables aléatoires et seront donc appelées *variables aléatoires non commutatives*. La forme linéaire  $\tau$  sera l'analogie de l'espérance. La donnée du couple  $(\mathcal{A}, \tau)$  est donc le pendant d'un espace probabilisé. En effet, en probabilités classiques, la donnée des événements est équivalente à la donnée des variables aléatoires bornées et la donnée de la forme linéaire espérance sur ces variables aléatoires bornées est équivalente à la donnée de la mesure de probabilité. Enfin, tout comme en théorie de probabilités classiques, on s'abstrait le plus possible de l'univers. On aimerait pouvoir parler de l'image d'une variable aléatoire non commutative par une fonction mesurable, et que cela reste une variable aléatoire non commutative, comme on le fait en probabilités classiques. Pour cela, nous introduisons des propriétés analytiques sur  $(\mathcal{A}, \tau)$ .

### 4.2 Topologies localement convexes sur $L(\mathbf{H})$

**Définition** 1. Un espace vectoriel topologique est un espace vectoriel complexe muni d'une topologie telle que la somme et le produit externe de cet espace sont continus.

2. Un espace vectoriel topologique tel que tout voisinage de  $0$  contient un voisinage convexe de  $0$  est appelé espace localement convexe.

Les espaces localement convexes sont une classe d'espaces largement étudiés en analyse et cela grâce au théorème suivant :

**Théorème 1** Soit  $E$  un espace vectoriel topologique.  $E$  est un espace localement convexe si et seulement si il existe une famille  $P$  de semi-normes sur  $E$  telle que la topologie sur  $E$  soit la topologie issue de  $P$ .

Dans les cas qui nous intéresseront, dire que la topologie sur  $E$  est issue de  $P$  signifiera que pour toute suite  $(x_n)$  d'éléments de  $E$ , et tout élément  $x \in E$  on a l'équivalence

$$x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} x \iff \forall p \in P, p(x_n - x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0.$$

Soit  $\mathbf{H}$  un espace de Hilbert complexe séparable. On note  $(\cdot|\cdot)$  et  $|\cdot|$  respectivement le produit scalaire et la norme dans  $\mathbf{H}$ . Le produit scalaire est sesquilinéaire à gauche. On note  $L(\mathbf{H})$  l'ensemble des opérateurs continus sur  $\mathbf{H}$ . C'est un espace de Banach lorsqu'on le munit de la norme d'opérateur. On note cette norme  $|\cdot|$  également (il n'y aura pas d'ambiguïté possible). On peut par ailleurs munir  $L(\mathbf{H})$  de deux autres topologies, qui en font un espace localement convexe.

**Définition** 1. On appelle topologie forte sur  $L(\mathbf{H})$  la topologie issue de la famille de semi-normes  $\{p_x, x \in \mathbf{H}\}$ , où  $\forall A \in L(\mathbf{H}), p_x(A) = |Ax|$ . Pour dire qu'une suite converge au sens de la topologie forte on dira que la suite en question converge fortement. La suite  $(A_n)$  d'éléments de  $L(\mathbf{H})$  converge fortement vers  $A \in \mathbf{H}$  si et seulement si  $\forall x \in H, A_n x \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} Ax$ .

2. On appelle topologie faible sur  $L(\mathbf{H})$  la topologie issue de la famille de semi-normes  $\{p_{x,y}, x, y \in \mathbf{H}\}$ , où  $\forall A \in L(\mathbf{H}), p_{x,y}(A) = |(y|Ax)|$ . Pour dire qu'une suite converge au sens de la topologie faible on dira que la suite en question converge faiblement. La suite  $(A_n)$  d'éléments de  $L(\mathbf{H})$  converge faiblement vers  $A \in \mathbf{H}$  si et seulement si  $\forall x \in H, (y|A_n x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} (y|Ax)$  i.e pour tout  $x \in \mathbf{H}$ , la suite  $(A_n x)$  converge vers  $Ax$  au sens de la convergence faible dans  $\mathbf{H}$ .

### 4.3 Calcul fonctionnel et théorème spectral pour les opérateurs unitaires

On adapte rapidement ici la présentation de [5], chapitre VII. Etant donné un opérateur (continu)  $A \in L(\mathbf{H})$  on note  $A^* \in L(\mathbf{H})$  son adjoint. On a  $A^{**} = A$ .

Si  $A^* = A$  alors on dit que  $A$  est hermitien, ou encore auto-adjoint. Par exemple, les projections orthogonales sont hermitiennes. Si  $A$  est hermitien,  $\forall x \in \mathbf{H}, (Ax|x) \in \mathbf{R}$ . L'ensemble des opérateurs hermitiens est partiellement ordonné par la relation suivante :  $A \leq B$  si  $\forall x \in \mathbf{H}, (Ax|x) \leq (Bx|x)$ . En particulier si l'opérateur hermitien  $A$  vérifie  $(Ax|x) \geq 0$  pour tout  $x$ , on dit que  $A$  est positif.

Si  $A$  est inversible d'inverse  $A^*$ , on dit que  $A$  est unitaire. Dans ce cas on le notera  $U$ .

Soit  $U$  un opérateur unitaire sur  $\mathbf{H}$ . En particulier,  $U$  est une isométrie. On peut définir  $P(U)$  où  $P$  est un polynôme trigonométrique : si

$$P(\exp(i\phi)) = \sum_{k=-n}^n c_k \exp(ik\phi),$$

on pose alors

$$P(U) = \sum_{k=-n}^n c_k U^k.$$

Notons  $\mathcal{P}$  l'ensemble des polynômes trigonométriques.  $\mathcal{P}$  et  $L(\mathbf{H})$  sont des  $\mathbf{C}$ -algèbres munies d'une involution  $*$ , respectivement le passage au polynôme conjugué et le passage à l'adjoint. Cette involution vérifie  $(x + \lambda y)^* = x^* + \bar{\lambda}y^*$ ,  $(xy)^* = y^*x^*$  et  $x^{**} = x$ , avec des notations évidentes. On appelle de telles  $\mathbf{C}$ -algèbres une  $*$ -algèbre. Alors,

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &\longrightarrow L(\mathbf{H}) \\ P &\longmapsto P(U) \end{aligned}$$

est un morphisme d' $*$ -algèbre.

On cherche à définir des "fonctions" de  $U$ , pour cela nous allons passer par le théorème spectral pour les opérateurs unitaires.

**Théorème 2** Soit  $U$  un opérateur unitaire sur  $\mathbf{H}$ . On peut faire correspondre à  $U$  une famille spectrale  $(E_\phi)_{\phi \in [0, 2\pi]}$  étalée sur le segment  $[0, 2\pi]$  c'est-à-dire une famille de projections orthogonales dépendant du paramètre  $\phi$  telle que  $\phi \mapsto E_\phi$  est croissante, fortement continue à droite, nulle en 0 et égale à l'identité en  $2\pi$ , de sorte qu'on ait

$$U = \int_0^{2\pi} \exp(i\phi) dE_\phi$$

au sens où l'intégrale à droite est limite en norme de somme de type Stieltjes. De plus,

- La famille  $(E_\phi)_\phi$  est entièrement déterminée par  $U$ ,
- Chacun des  $E_\phi$  est limite forte de polynômes (au sens précédent) de  $U$ ,
- On a plus généralement,

$$\forall P \in \mathcal{P}, P(U) = \int_0^{2\pi} P(\exp(i\phi)) dE_\phi,$$

- On a également,

$$\forall x, y \in \mathbf{H}, (Ux|y) = \int_0^{2\pi} \exp(i\phi) d(E_\phi x|y)$$

au sens ordinaire de l'intégrale de Stieltjes par rapport à la fonction à variation finie  $\phi \mapsto (E_\phi x|y)$ .

**Remarque** Afin de voir que la fonction  $\phi \mapsto (E_\phi x|y)$  est à variation finie, on utilise les formules de polarisation pour la forme bilinéaire  $(x, y) \mapsto (E_\phi x|y)$ .

**Remarque** Si  $\mathbf{H}$  est de dimension finie  $N$  alors  $U$  est une matrice unitaire de taille  $N$ . Elle est diagonalisable en base orthonormale  $e = (e_1, \dots, e_N)$  donc  $\mathbf{H}$  se décompose en somme directe orthogonale de ses espaces propres  $\mathbf{H}_j$ ,  $\mathbf{H} = \bigoplus_{j=1}^p \mathbf{H}_j$  et son spectre est de la forme  $\exp(i\phi_1), \dots, \exp(i\phi_p)$  où  $0 \leq \phi_1 < \dots < \phi_N < 2\pi$ . Pour tout  $\phi \in [0, 2\pi]$ , on note  $E_\phi$  la projection orthogonale sur  $\mathbf{H}_j$

où  $j$  est tel que  $\phi_j \leq \phi < \phi_{j+1}$ . Alors, dans le théorème précédent, la famille spectrale  $(E_\phi)$  convient pour  $U$ . En effet, on a

$$U = \int_0^{2\pi} \exp(i\phi) dE_\phi = \sum_{j=1}^N \exp(i\phi_j) e_i e_i^t$$

d'après le théorème spectral pour les matrices unitaires. Le théorème est donc une généralisation du théorème spectral pour les matrices unitaires.

Pour construire des fonctions de  $U$ , introduisons tout d'abord une notion d'ensemble de mesure nulle par rapport aux fonctions croissantes  $\phi \mapsto (E_\phi x | x)$ . Pour cela, à chacune d'elle on associe sa mesure de Stieltjes  $\mu_x$ . On dit qu'un borélien  $B$  de  $[0, 2\pi[$  est de mesure nulle si et seulement si

$$\forall x, \mu_x(B) = 0.$$

Ensuite, on définit classiquement la notion de vérité "presque partout," et cette notion fonctionne de la même manière que la notion habituelle.

Adaptons aux opérateurs unitaires la présentation de [5], chapitre IX. Il suffit pour cela de poser

$$(y | f(U)x) = \int_0^{2\pi} f(\exp(i\phi)) d(y | E_\phi x)$$

dès que cela a un sens. Plus précisément soit  $f$  une fonction borélienne sur  $\mathbf{T}$  le cercle unité de  $\mathbf{C}$ . On suppose que  $\phi \mapsto f(\exp(i\phi))$  est bornée presque partout sur  $[0, 2\pi[$ . On peut montrer que

$$y \mapsto \int_0^{2\pi} f(\exp(i\phi)) d(y | E_\phi x)$$

est le conjugué d'une forme linéaire continue et de norme inférieure à  $\|f\| \|x\|$  où la norme d'une fonction désigne la norme uniforme. Par le théorème de représentation de Riesz, il existe un unique vecteur  $x^*$  tel que,

$$\forall y \in \mathbf{H}, (y | x^*) = \int_0^{2\pi} f(\exp(i\phi)) d(y | E_\phi x).$$

On pose  $f(U)x = x^*$  et on vérifie que  $f(U)$  est linéaire, de norme au plus  $\|f\|$ . De plus, on vérifie que

$$\begin{array}{ccc} L^\infty(\mathbf{T}) & \longrightarrow & L(\mathbf{H}) \\ f & \longmapsto & f(U) \end{array}$$

est encore un morphisme d'\*-algèbre qui prolonge le précédent.

A ces propriétés algébriques s'ajoutent des propriétés analytiques rapides à vérifier également :  $f \geq 0 \implies f(U) \geq 0$ ,  $\|f(U)\| \leq \|f\|$ , et  $\|f(U)x\| = \int_0^{2\pi} |f|^2(\exp(i\phi)) d(E_\phi x | x)$ . Ces propriétés impliquent notamment que si  $(f_n)_n, f$  sont des fonctions boréliennes sur  $\mathbf{T}$  et si les  $\phi \mapsto f_n(\exp(i\phi))$  convergent presque partout vers  $\phi \mapsto f(\exp(i\phi))$  alors la suite  $(f_n(U))_n$  converge fortement vers  $f(U)$ . Et si la convergence des  $(f_n)_n$  est uniforme alors la convergence des  $(f_n(U))_n$  a lieu en norme.

Enfin, les fonctions de  $U$  commutent, et commutent même avec tous les opérateurs qui commutent avec  $U$ , comme c'était le cas pour les polynômes de  $U$ .

Nous avons détaillé le cas des opérateurs unitaires parce que ce sont les opérateurs qui nous intéresseront dans la suite et parce que ce qui précède donne un point de vue plus concret de la présentation qui suit.

## 4.4 $C^*$ -algèbres et calcul fonctionnel continu

Soit  $A$  un opérateur normal (i.e qui commute avec son adjoint) sur  $\mathbf{H}$ . Le spectre de  $A$ , noté  $Sp(A)$ , est l'ensemble des nombres complexes  $z$  tels que  $A - z1$  n'est pas inversible (1 désigne l'identité). C'est un compact non vide de  $\mathbf{C}$ . On appelle rayon spectral de  $A$  le nombre réel positif  $\max\{|z|, z \in Sp(A)\}$ . Pour  $A$  normal, le rayon spectral n'est autre que la norme de  $A$ ,  $|A|$ . Si  $P \in \mathbf{C}[X, \overline{X}]$ , on peut définir  $P(A)$  de sorte que

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{C}[X, \overline{X}] & \longrightarrow & L(\mathbf{H}) \\ P & \longmapsto & P(A) \end{array}$$

est un morphisme d'\*-algèbre (on pose pour cela  $\overline{X}(A) = A^*$ ). On appelle cette application le calcul fonctionnel polynomial pour  $A$ . Notons que son image est l'\*-sous-algèbre engendrée par  $A$ .

Expliquons comment peut on prolonger ce morphisme à l'espace des fonctions continues sur le spectre de  $A$ . Tout d'abord, on peut montrer que l'image par un polynôme  $P$  du spectre de  $A$  est le spectre de  $P(A)$ . Cela implique que le rayon spectral de  $P(A)$  est  $|P|$ , la norme uniforme de  $P$  sur le spectre de  $A$ .

Puisque  $P(A)$  est également normal (par propriété de morphisme), on a

$$|P(A)| = |P|,$$

i.e l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{C}[X, \overline{X}] & \longrightarrow & L(\mathbf{H}) \\ P & \longmapsto & P(A), \end{array}$$

est une isométrie lorsqu'on munit  $\mathbf{C}[X, \overline{X}]$  de la norme uniforme sur  $Sp(A)$ . Par le théorème de Stone Weierstrass (cas complexe),  $\mathbf{C}[X, \overline{X}]$  est dense pour cette norme dans  $C(Sp(A))$ , l'ensemble des fonctions continues sur le spectre de  $A$ . Puisque  $L(\mathbf{H})$  est complet, on peut prolonger cette application de manière unique en une isométrie de  $C(Sp(A))$  sur  $L(\mathbf{H})$ . L'image de  $f \in C(Sp(A))$  par cette isométrie sera notée  $f(A)$ . On appelle cette isométrie "calcul fonctionnel continu pour  $A$ ". Elle conserve les propriétés de morphisme.  $f(A)$  est normal et commute avec tous les opérateurs qui commutent avec  $A$ . On conserve le "spectral mapping theorem":  $f(Sp(A)) = Sp(f(A))$ .

Enfin, si  $f(Sp(A)) \subset \mathbf{R}$ , alors  $f(A)$  est hermitien, si  $f(Sp(A)) \subset \mathbf{R}_+$ , alors  $f(A)$  est hermitien positif et si  $f(Sp(A)) \subset \mathbf{T}$ , alors  $f(A)$  est unitaire.

En analyse, le calcul fonctionnel continu est défini plus généralement pour des éléments normaux d'une  $C^*$ -algèbre.

**Définition**  $\mathcal{A}$  est une  $C^*$ -algèbre si c'est une \*-algèbre unitaire munie d'une norme  $|\cdot|$  telle que

- $(\mathcal{A}, |\cdot|)$  est complet
- $\forall x \in \mathcal{A}, |x^*x| = |x|^2$
- $\forall x, y \in \mathcal{A}, |xy| \leq |x||y|$ .

$L(\mathbf{H})$  est une  $C^*$ -algèbre et toute  $*$ -sous-algèbre unitaire de  $L(\mathbf{H})$  fermée pour la norme l'est également.

**Remarque** La  $C^*$ -algèbre engendrée par  $A$  est l'image du calcul fonctionnel continu pour  $A$ , i.e l'ensemble des fonctions continues de  $A$ . En effet, toute  $C^*$ -algèbre qui contient  $A$  contient l'adhérence (pour la norme) de l'ensemble des polynômes de  $A$ , donc contient les fonctions continues de  $A$ . De plus, l'ensemble des fonctions continues de  $A$  est une  $C^*$ -algèbre. Pour voir qu'il est fermé il suffit de remarquer qu'une isométrie transforme un espace complet en un espace complet. Ainsi, l'ensemble des fonctions continues de  $A$  est complet donc fermé pour la norme. Si on le note  $C^*(A)$ ,

$$\begin{array}{ccc} C(Sp(A)) & \longrightarrow & C^*(A) \\ f & \longmapsto & f(A) \end{array}$$

est un  $*$ -isomorphisme isométrique.

De manière générale, si  $A$  est un opérateur quelconque sur  $\mathbf{H}$ ,  $C^*(A)$  est l'adhérence pour la norme de la  $*$ -sous-algèbre engendrée par  $A$ .

## 4.5 Algèbres de Von Neumann et calcul fonctionnel mesurable

En fait, on peut généraliser le calcul fonctionnel précédent au cas de fonctions boréliennes bornées sur le spectre de  $A$ . On note  $B(Sp(A))$  l'ensemble des fonctions boréliennes bornées sur le spectre de  $A$ . C'est également une  $*$ -algèbre ( $*$  étant le passage à la fonction conjuguée dans  $\mathbf{C}$ ). Il existe un morphisme d' $*$ -algèbre appelé "calcul fonctionnel mesurable pour  $A$ ",

$$\begin{array}{ccc} B(Sp(A)) & \longrightarrow & L(\mathbf{H}) \\ f & \longmapsto & f(A) \end{array}$$

qui étend le calcul fonctionnel continu pour  $A$ . De plus la calcul fonctionnel mesurable vérifie la propriété analytique suivante : Si  $(f_n)_n$  est une suite bornée (pour la norme uniforme) d'éléments de  $B(Sp(A))$  qui converge simplement vers  $f \in B(Sp(A))$  alors  $(f_n(A))$  converge fortement vers  $f(A)$ .

**Remarque** Nous avons observé cela dans le cas des opérateurs unitaires. Nous avons dans ce cas associé à l'opérateur unitaire  $U$  une notion d'ensemble de mesure nulle (ou encore une mesure, à équivalence de mesure près). On peut, par des considérations similaires associer à  $A$  une notion d'ensemble de mesure nulle sur  $Sp(A)$ . Lorsqu'on munit  $B(Sp(A))$  de la norme sup presque partout sur  $Sp(A)$ , le calcul fonctionnel borélien reste isométrique.

En analyse, le calcul fonctionnel mesurable est défini plus généralement pour des éléments normaux d'une  $W^*$ -algèbre ou algèbre de Von Neumann. Les algèbres de Von Neumann sont un cas particulier de  $C^*$ -algèbre.

Si  $E \subset L(\mathbf{H})$ , on note  $E'$  son commutant, l'ensemble des opérateurs qui commutent avec les opérateurs de  $E$ . On note  $E'' = (E')'$  son bicommutant, l'ensemble des opérateurs qui commutent avec tous les opérateurs qui commutent avec les opérateurs de  $E$ . Nous avons déjà vu que si  $f \in C(Sp(A))$  alors  $f(A) \in \{A\}''$ . Le résultat qui permet d'introduire naturellement les algèbres de Von Neumann en analyse fonctionnelle est le suivant.

**Théorème 3 (Théorème du bicommutant de Von Neumann)** *Soit  $\mathcal{A}$  une  $*$ -sous-algèbre de  $L(\mathbf{H})$  (stable pour le passage à l'adjoint). Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1.  $\mathcal{A}'' = \mathcal{A}$
2.  $\mathcal{A}$  est fortement fermée
3.  $\mathcal{A}$  est faiblement fermée

**Remarque** Ce théorème relie des propriétés analytiques (fermeture) de la sous-algèbre  $\mathcal{A}$  à des propriétés algébriques (bicommutant) de  $\mathcal{A}$ .

**Définition** Soit  $\mathcal{A}$  une sous-algèbre unitaire de  $L(\mathbf{H})$  stable pour le passage à l'adjoint. Si  $\mathcal{A}'' = \mathcal{A}$  alors on dit que  $\mathcal{A}$  est une algèbre de Von Neumann.

$L(\mathbf{H})$  est une  $W^*$ -algèbre et toute  $*$ -sous-algèbre unitaire de  $L(\mathbf{H})$  faiblement fermée l'est également.

**Remarque** La  $W^*$ -algèbre engendrée par  $A$  est l'image du calcul fonctionnel mesurable pour  $A$ , i.e l'ensemble des fonctions boréliennes bornées de  $A$ . Si  $f$  est une fonction borélienne bornée sur le spectre de  $A$ , il existe une suite de fonctions continues sur le spectre de  $A$  qui converge simplement vers  $f$  en étant bornées par la même borne que  $f$ . Une propriété analytique du calcul fonctionnel mesurable assure que  $f(A)$  est fortement donc faiblement adhérent à  $C^*(A)$ . Donc, si une  $W^*$ -algèbre contient  $A$  elle contient l'adhérence faible de  $C^*(A)$ , elle contient  $f(A)$  pour tout  $f \in B(Sp(A))$ . De plus, l'ensemble des fonctions boréliennes bornées de  $A$  est une  $W^*$ -algèbre.

Pour voir qu'il est fortement fermé, prenons une suite  $(f_n(A))_n$  qui converge fortement et montrons que la limite est une fonction borélienne et bornée de  $A$ ,  $f(A)$ . On commence par supposer que  $f_n$  est continue pour tout  $n$ . Par le théorème de Banach Steinhaus, cette suite est bornée en norme. Donc la suite  $(f_n)_n$  est bornée pour la norme uniforme et chacune des suites complexes  $(f_n(z))_n$  est bornée. En utilisant la séparabilité du spectre de  $A$ , un procédé diagonal, et la continuité des  $f_n$ , on peut extraire de  $(f_n)_n$  une sous-suite convergeant simplement  $f$ .  $f$  est également borélienne et bornée et  $(f_n(A))_n$  converge fortement vers  $f(A)$  le long de cette sous-suite, par la propriété analytique du calcul fonctionnel mesurable. Donc  $(f_n(A))_n$  converge fortement vers  $f(A)$ . Si on suppose seulement que les  $f_n$  sont boréliennes bornées, il existe une suite de fonctions continues  $(g_n)$  telle que  $(f_n - g_n)$  converge simplement vers 0.  $(f_n(A))_n$  et  $(g_n(A))_n$  ont alors même limite forte. Mais une limite forte de  $(g_n(A))_n$  est

une fonction borélienne bornée de  $A$ ,  $f(A)$  par le cas précédent. Donc  $(f_n(A))$  converge fortement vers  $(f(A))$ .

On note  $W^*(A)$  la  $W^*$ -algèbre engendrée par  $A$ . Alors,

$$\begin{array}{ccc} B(Sp(A)) & \longrightarrow & W^*(A) \\ f & \longmapsto & f(A) \end{array}$$

est un  $*$ -isomorphisme isométrique.

De manière générale, si  $A$  est un opérateur quelconque sur  $\mathbf{H}$ ,  $W^*(A)$  est l'adhérence forte/faible de la  $*$ -sous-algèbre engendrée par  $A$ . Montrons par exemple que cet ensemble est stable pour le produit. Soient  $U$  et  $V$  dans cet ensemble. Soient  $(U_n)$  et  $(V_n)$  deux suites d'éléments de la  $*$ -sous-algèbre engendrée par  $A$  qui convergent fortement respectivement vers  $U$  et  $V$ . Montrons que  $(U_n V_n)$  converge fortement vers  $UV$ . Soit  $x \in \mathbf{H}$ .

$$|UVx - U_n V_n x| = |(U - U_n)Vx - U_n(V_n - V)x| \leq |(U - U_n)Vx| + |U_n|(V_n - V)x|.$$

Or, la suite  $(U_n)$  est bornée en norme par le théorème de Banach Steinhaus. Donc

$$|UVx - U_n V_n x| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Pour tout  $n$ ,  $U_n V_n$  est dans la  $*$ -sous-algèbre engendrée par  $A$  donc  $UV$  est fortement adhérent à cet ensemble.

Les  $W^*$ -algèbres sont un cas particulier de  $C^*$ -algèbre dans lesquels on peut faire un calcul fonctionnel plus général que le calcul fonctionnel continu (pour les opérateurs normaux).

# Chapter 5

## Liberté

### 5.1 Point de vue analytique

**Définition** On appellera dorénavant espace de probabilité non commutatif un couple  $(\mathcal{A}, \tau)$  où  $\mathcal{A}$  est une algèbre de Von Neumann et  $\tau$  une forme linéaire complexe sur  $\mathcal{A}$ , faiblement continue et telle que

- $\tau(1) = 1$
- $\forall A, B \in \mathcal{A}, \tau(AB) = \tau(BA)$
- $(A, B) \mapsto \tau(A^*B)$  est un produit scalaire complexe sur  $\mathcal{A}$ .

La forme linéaire  $\tau$  est continue pour la norme dans  $\mathcal{A}$ , on peut même montrer que

$$\forall A \in \mathcal{A}, |\tau(A)| \leq |A|.$$

Etant donnée une variable aléatoire non commutative  $A \in \mathcal{A}$  normal, le calcul fonctionnel mesurable pour  $A$  assure que  $f(A) \in \mathcal{A}$  si  $f \in B(Sp(A))$ . Tout comme en probabilités classiques, on a une propriété du type "une fonction mesurable d'une variable aléatoire est encore une variable aléatoire". Ensuite, en utilisant le théorème de représentation de Riesz (concernant les mesures), la forme linéaire  $f \mapsto \tau(f(A))$  est représentée par une mesure de probabilité à support compact inclus dans  $Sp(A)$ ,  $\mu_A$ . On peut montrer que cette mesure a pour support  $Sp(A)$ .

**Définition** On appelle distribution de la variable aléatoire non commutative normale  $A$  l'unique mesure de probabilité à support compact inclus dans  $Sp(A)$ ,  $\mu_A$  telle que

$$\forall f \in C(Sp(A)), \tau(f(A)) = \int_{Sp(A)} f d\mu_A.$$

Cette mesure à pour support  $Sp(A)$  et vérifie  $\forall f \in B(Sp(A)), \tau(f(A)) = \int_{Sp(A)} f d\mu_A$ .

On peut maintenant donner des exemples d'espaces de probabilité non commutatifs.

**Exemple** 1. "Commutatif". Soit  $\mathcal{A} = L^\infty(\Omega, \mathbf{P})$

l'espace des variables aléatoires complexes bornées sur un espace probabilisé. Notons  $\mathbf{E}$  l'espérance.  $(\mathcal{A}, \mathbf{E})$  est un espace de probabilité non commutatif. Pour le voir, il suffit de voir les variables aléatoires bornées comme des opérateurs sur  $L^2_{\mathbf{C}}(\Omega, \mathbf{P})$ , qui agissent par multiplication. Cela fait de  $\mathcal{A}$  une algèbre de Von Neumann. De plus, cette algèbre est commutative donc tous les éléments sont normaux. La distribution de  $A \in \mathcal{A}$  est sa loi en tant que variable aléatoire (remarquer qu'elle est à support compact).

2. "Dimension finie". Soit  $\mathcal{A} = M_N(\mathbf{C})$  et  $\text{tr}$  la trace sur  $\mathcal{A}$ .  $(\mathcal{A}, \frac{1}{N}\text{tr})$  est un espace de probabilité non commutatif. Pour une matrice  $A$  normale,  $A$  est diagonalisable en base orthonormale et la distribution est la loi empirique des valeurs propres de  $A$ ,  $\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \delta_{\mu_j}$  où  $\mu_1, \dots, \mu_N$  sont les valeurs propres de  $A$ .
3. Mélange des deux cas précédents. Soit  $\mathcal{A} = M_N(L^\infty_{\mathbf{C}}(\Omega, \mathbf{P}))$ . Quitte à généraliser un peu nos définitions,  $(\mathcal{A}, \frac{1}{N}\mathbf{E}(\text{tr}))$  est un espace de probabilité non commutatif, et la loi d'une matrice normale est l'espérance de la loi empirique des valeurs propres.

Il existe également une notion d'espérance conditionnelle en probabilités libres. Elle nous intéressera dans la suite. Soit  $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$  une  $W^*$ -sous-algèbre de  $\mathcal{A}$ . Il existe une application  $\tau(\cdot|\mathcal{B}) : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  qui est une contraction faiblement continue, positive (au sens où elle envoie les opérateurs positifs de  $\mathcal{A}$  sur des opérateurs positifs de  $\mathcal{B}$ ), et même complètement positive et telle que  $\tau(1|\mathcal{B}) = 1$ . Cette application est caractérisée par les propriétés suivantes :  $\forall A \in \mathcal{A}$ ,

$$\tau(AB) = \tau(\tau(A|\mathcal{B})B), \forall B \in \mathcal{B}$$

et

$$\tau(A|\mathcal{B}) \in \mathcal{B}.$$

Cette application vérifie également

$$\forall A \in \mathcal{A}, \forall B, C \in \mathcal{B}, \tau(BAC|\mathcal{B}) = B\tau(A|\mathcal{B})C$$

(cf. [7]). Ces propriétés sont analogues aux propriétés classiques de l'espérance conditionnelle.

## 5.2 Définition de la relation de liberté

Il est maintenant temps d'introduire la notion principale des probabilités libres qui est l'analogue de l'indépendance, mais n'a d'intérêt que dans le cadre non commutatif. On commence par définir la liberté entre des sous-algèbres.

**Définition**  $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_p$  des  $*$ -sous-algèbres unitaires de  $(\mathcal{A}, \tau)$  sont libres si  $\forall n > 0, \forall a_1, \dots, a_n$ ,

$$\begin{cases} a_1 \in \mathcal{A}_{i_1}, \dots, a_n \in \mathcal{A}_{i_n} \\ i_1 \neq i_2, \dots, i_{n-1} \neq i_n \\ \tau(a_1) = 0, \dots, \tau(a_n) = 0 \end{cases}$$

$\implies$

$$\tau(a_1 \dots a_n) = 0$$

Une famille infinie de  $*$ -sous-algèbres unitaires est libre si toute sous-famille finie est libre.

Il existe des exemples non triviaux d' $*$ -sous-algèbres libres. Mieux, si on dispose d'une collection d'espaces de probabilité non commutatifs, on peut toujours les plonger dans un "gros" espace de probabilité non commutatif de sorte que ces espaces soit libres.

Pour définir la liberté entre des variables aléatoires non commutatives on remarque d'abord le résultat suivant.

**Proposition 4** *Soit  $A_1, \dots, A_p$  des variables aléatoires non commutatives. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- *Les  $*$ -sous-algèbres unitaires engendrées par  $A_1, \dots, A_p$  sont libres*
- *Les  $C^*(A_1), \dots, C^*(A_p)$  sont libres*
- *Les  $W^*(A_1), \dots, W^*(A_p)$  sont libres*

**Preuve** Les arguments de la preuve sont simplement la continuité faible de  $\tau$  et le fait que pour tout opérateur  $A$ ,  $C^*(A)$  est l'adhérence pour la norme de la  $*$ -sous-algèbre unitaire engendrée par  $A$  et  $W^*(A)$  est l'adhérence faible de la  $*$ -sous-algèbre unitaire engendrée par  $A$ .

**Définition** Soit  $A_1, \dots, A_p$  des variables aléatoires non commutatives. Elles sont libres si les  $W^*(A_1), \dots, W^*(A_p)$  sont libres.

La liberté est utilisée en probabilités libres comme une règle pour calculer les moments de type  $\tau(a_1 \dots a_n)$ . Ces calculs font intervenir des objets combinatoires non triviaux que l'on appelle partitions non croisées.

### 5.3 Partitions non croisées

Soit  $S$  un ensemble fini totalement ordonné, typiquement  $\{1, \dots, n\}$ ,  $n \in \mathbf{N}^*$ .  $\pi$  est une partition sur  $S$  si c'est une collection de sous-ensembles non vides de  $S$ , deux à deux disjoints et de réunion  $S$ . Ces sous-ensembles sont appelés blocs de  $\pi$ . Il existe une unique relation d'équivalence sur  $S$  telle que les blocs de  $\pi$  soit les classes d'équivalences de cette relation. C'est la relation  $\sim_\pi$  telle que pour tout éléments  $x, y \in S$ ,  $x \sim_\pi y$  si et seulement si  $x$  et  $y$  appartiennent au même bloc de  $\pi$ . Réciproquement, étant donnée une relation d'équivalence sur  $S$ , ses classes d'équivalences forment une partition de  $S$ . C'est pourquoi on appellera parfois "classes" les blocs de  $\pi$ .

L'ensemble des partitions de  $S$  est un ensemble partiellement ordonné. On dit que la partition  $\pi$  est plus fine que la partition  $\pi'$ , ce que l'on note  $\pi \leq \pi'$ , si on a l'implication

$$\forall x, y \in S, x \sim_\pi y \implies x \sim_{\pi'} y.$$

Les partitions qui vont nous intéresser pour les calculs de moments sont les partitions non croisées. Dans [3] (lecture 8), les auteurs montrent comment

des partitions interviennent dans une démonstration du théorème central limite classique, et de quelle manière celles-ci sont remplacées par des partitions non croisées dans une démonstration du théorème central limite libre.

**Définition** Une partition  $\pi$  de l'ensemble fini totalement ordonné  $S$  est croisée si il existe  $x_1 < y_1 < x_2 < y_2$  dans  $S$  tels que  $x_1 \sim_{\pi} x_2$ ,  $y_1 \sim_{\pi} y_2$ , mais pas  $y_1 \sim_{\pi} x_2$ . Dans le cas contraire la partition est dite non croisée. On note  $NC(S)$  l'ensemble des partitions non croisées de  $S$  et  $NC(n) = NC(\{1, \dots, n\})$

Si  $S_1$  et  $S_2$  sont deux ensembles finis totalement ordonnés de même cardinal on identifiera naturellement  $NC(S_1)$  et  $NC(S_2)$ . Si  $\{S_1, S_2\}$  est une partition de  $S$ ,  $\pi_1 \in NC(S_1)$  et  $\pi_2 \in NC(S_2)$ , on note  $\pi_1 \cup \pi_2$  la partition de  $S$  qui a pour blocs ceux de  $\pi_1$  et ceux de  $\pi_2$ .  $\pi_1 \cup \pi_2$  n'est pas forcément non croisée.

**Proposition 5** Si  $n \geq 1$ , le cardinal de  $NC(n)$  est le  $n$ ème nombre de Catalan  $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ . Ce nombre est inférieur à  $4^n$ .

**Preuve** Soit  $n \geq 1$ , on note  $D_n$  le cardinal de  $NC(n)$ , et  $D_0 = 1$ . Nous allons montrer que pour tout  $n \geq 1$ ,

$$D_n = \sum_{i=1}^n D_{i-1} D_{n-i}.$$

En effet, cette relation caractérise les nombres de Catalan  $C_n$ . Si  $1 \leq i \leq n$ , on note  $NC^{(i)}(n)$  l'ensemble des partitions de  $NC(n)$  telles que le bloc qui contient 1 a pour maximum  $i$ . A cause de la condition de non croisement, une telle partition  $\pi \in NC^{(i)}(n)$  se décompose canoniquement en  $\pi = \pi_1 \cup \pi_2$  où  $\pi_1 \in NC(i)$  et  $\pi_2 \in NC(\{i+1, \dots, n\}) \simeq NC(n-i)$ . Ainsi

$$NC^{(i)}(n) \simeq NC^{(i)}(i) \times NC(n-i).$$

Mais en restreignant  $\pi_1$  à  $\{1, \dots, i-1\}$  on voit que  $NC^{(i)}(i)$  est en bijection avec  $NC(i-1)$  (la bijection réciproque consiste juste à mettre  $i$  dans le même bloc que 1, cela ne crée pas de croisement). Donc

$$NC^{(i)}(n) \simeq NC(i-1) \times NC(n-i).$$

Enfin,  $NC(n)$  est l'union disjointe des  $NC^{(i)}(i)$ . En prenant les cardinaux on obtient la formule.

En induisant la relation d'ordre entre les partitions,  $NC(n)$  est partiellement ordonné. Mieux,  $NC(n)$  est un treillis.

**Définition** Soit  $P$  un ensemble partiellement ordonné

1. Soit  $\pi, \sigma \in P$ . Si l'ensemble des éléments qui sont plus grands que  $\pi$  et  $\sigma$  est non vide et admet un plus petit élément  $M$ , alors  $M$  est appelé le sup de  $\pi$  et  $\sigma$  et est noté  $\sup(\pi, \sigma)$ .
2. Soit  $\pi, \sigma \in P$ . Si l'ensemble des éléments qui sont plus petits que  $\pi$  et  $\sigma$  est non vide et admet un plus grand élément  $m$ , alors  $m$  est appelé l'inf de  $\pi$  et  $\sigma$  et est noté  $\inf(\pi, \sigma)$ .

3.  $P$  est un treillis si toute paire d'éléments de  $P$  admet un sup et un inf.

**Proposition 6** *Soit  $n \geq 1$ .  $(NC(n), \leq)$  est un treillis.*

**Preuve**  $NC(n)$  a un maximum, la partition la plus grossière, celle qui ne contient qu'un seul bloc. De plus, toute paire de partition  $\pi, \sigma$  de  $NC(n)$  admet un inf. En effet, c'est la partition dont les blocs sont les intersections deux à deux (non vides) des blocs de  $\pi$  et  $\sigma$ . Cette partition reste non croisée. Ces deux propriétés assurent que  $NC(n)$  est un treillis (c'est un fait général dans les ensembles finis partiellement ordonnés). Pour trouver le sup de  $\pi$  et  $\sigma$ , considérons l'ensemble des partitions non croisées plus grandes que  $\sigma$  et  $\pi$ . C'est un ensemble non vide (il contient la partition la plus grossière) et fini. L'inf de cet ensemble (qui est défini par récurrence à partir de l'inf de deux éléments) convient.

### 5.3.1 Partition complémentaire

Soient  $n = 2k, k \in \mathbf{N}^*$  et  $S_1 = \{1, 3, \dots, 2k-1\}$  et  $S_2 = \{2, 4, \dots, 2k\}$ . Notons

$$K_1 : NC(S_1) \longrightarrow NC(S_2) \\ \pi \longmapsto \pi^c = \sup\{p \in NC(S_2), \pi \cup p \in NC(n)\} .$$

Soit  $\pi$  dans  $NC(S_1)$ .

D'une part le sup est en fait un max. En effet, les  $p \in NC(S_2)$  tels que  $\pi \cup p \in NC(n)$  sont les  $p \in NC(S_2)$  pour lesquels  $\forall i, j \in S_2$ , on a  $i \underset{p}{\sim} j$  entraîne l'implication suivante, notée  $Prop(\pi, i, j)$  :

$$\forall k, l \in S_1, k \underset{\pi}{\sim} l \implies \begin{array}{l} k, l \in ]i, j[ \\ \text{ou} \\ k, l \notin [i, j] \end{array} .$$

Cela signifie qu'une condition nécessaire pour avoir  $i \underset{p}{\sim} j$  est que les blocs de  $\pi$  ne créent pas de croisement avec  $i$  et  $j$ , ce que l'on note  $Prop(\pi, i, j)$ . Parmi toutes les partitions  $p \in NC(S_2)$ , on note  $\pi^c$  la partition de  $S_2$  pour laquelle la condition est suffisante:

$$\forall i, j \in S_2, i \underset{\pi^c}{\sim} j \iff Prop(\pi, i, j).$$

$\pi^c$  est donc entièrement déterminée.

On vérifie ensuite que  $\pi^c \in NC(S_2)$ . Cela vient de la manière dont  $S_1$  et  $S_2$  sont entrelacés.

Enfin,  $\pi^c$  est moins fine que toutes les autres partitions  $p \in NC(S_2)$  telles que  $\pi \cup p \in NC(n)$ .  $\pi^c$  s'appelle la partition complémentaire de  $\pi$  (dans  $NC(n)$ ). De plus,  $\{p \in NC(S_2), p \leq \pi^c\} = \{p \in NC(S_2), \pi \cup p \in NC(n)\}$ . En effet, si  $p \in NC(S_2), p \leq \pi^c$  alors  $\forall i, j \in S_2$ ,

$$i \underset{p}{\sim} j \implies i \underset{\pi^c}{\sim} j \implies Prop(\pi, i, j)$$

donc  $\pi \cup p \in NC(n)$ .

D'autre part on définit, en échangeant les indices 1 et 2, l'application  $K_2$ .

$$K_2 : NC(S_2) \longrightarrow NC(S_1) \\ \pi \longmapsto \pi^c = \sup\{p \in NC(S_1), p \cup \pi \in NC(n)\}$$

et montrons que  $K_2 K_1(\pi) = \pi$ . On vérifie qu'on a

$$\forall k, l \in S_1, k \underset{\pi}{\sim} l \iff Prop(\pi^c, k, l)$$

par définition de  $\pi^c$ . Ainsi  $\forall k, l \in S_1$ ,

$$k \underset{\pi}{\sim} l \iff Prop(\pi^c, k, l) \iff k \underset{K_2 K_1(\pi)}{\sim} l,$$

d'où

$$K_2 K_1(\pi) = \pi.$$

## 5.4 Approche combinatoire de la liberté

Les idées qui permettent d'utiliser les partitions non croisée pour étudier la liberté sont synthétisées dans [3]. Soit  $(\mathcal{A}, \tau)$  est un espace de probabilité non commutatif,  $(\psi_n)$  une famille de formes  $n$ -linéaires sur  $\mathcal{A}$  et  $(A_1, \dots, A_n) \in \mathcal{A}^n$ . On omet d'écrire l'exposant  $n$  quand il n'y a pas d'ambiguïté. Pour tout  $\pi \in NC(n)$  on pose

$$\psi[\pi](A_1, \dots, A_n) = \prod_{V \in \pi} \psi(A_V),$$

où  $A_V = (A_{j_1}, \dots, A_{j_p})$  si  $V = \{j_1, \dots, j_p\}$  est un bloc de  $\pi$ , avec  $j_1 < \dots < j_p$ . Si  $\psi_n(A_1, \dots, A_n) = \tau(A_1 \dots A_n)$  on prendra la notation évidente  $\tau[\pi](A_1 \dots A_n)$ .

En combinatoire, la théorie de l'inversion de Möbius (voir [3], lectures 10 et 11) assure qu'il existe une unique famille de formes  $n$ -linéaires  $R_n$  telle que

$$\tau(A_1, \dots, A_n) = \sum_{\pi \in NC(n)} R[\pi](A_1, \dots, A_n),$$

et plus généralement,

$$\tau[\pi](A_1, \dots, A_n) = \sum_{\sigma \in NC(n), \sigma \leq \pi} R[\sigma](A_1, \dots, A_n).$$

Les éléments de cette famille sont appelés cumulants non croisés et s'écrivent

$$R(A_1, \dots, A_n) = \sum_{\pi \in NC(n)} \mu(\pi) \tau[\pi](A_1, \dots, A_n)$$

où  $\mu$  est appelée fonction de Möbius sur  $NC(n)$ . Elle vérifie  $\forall \pi \in NC(n), |\mu(\pi)| \leq 4^n$ . Rappelons qu'on a également  $|NC(n)| = C_n \leq 4^n$ . Donc, d'une part,

$$\forall \pi \in NC(n), |\tau[\pi](A_1, \dots, A_n)| \leq \prod_{j=1}^n |A_j|$$

et

$$|R(A_1, \dots, A_n)| \leq 4^{2n} \prod_{j=1}^n |A_j|.$$

Le théorème suivant établit la connection entre les cumulants non croisés et la liberté.

**Proposition 7** Soit  $(\mathcal{B}_i)_i$  une famille libre de sous-algèbres. Soit  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ , tels que chacun des  $A_j$  appartient à un certain  $\mathcal{B}_{i_j}$ .

Alors  $R(A_1, \dots, A_n) = 0$  dès qu'il existe  $j$  et  $k$  tels que  $i_j \neq i_k$ .

Ce résultat a une conséquence que l'on utilisera dans la suite.

Soient  $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2 \subset \mathcal{A}$  deux sous-algèbres libres, ainsi que  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ , tels que chacun des  $A_j$  appartient à  $\mathcal{B}_1$  ou  $\mathcal{B}_2$ . Cela induit une partition sur  $\{1, \dots, n\}$ , celle dont le bloc  $S_1$  contient les indices  $j$  tels que  $A_j$  appartient à  $\mathcal{B}_1$  et dont le bloc  $S_2$  contient les indices  $j$  tels que  $A_j$  appartient à  $\mathcal{B}_2$ . C'est également la partition issue de la relation d'équivalence suivante :  $j \sim k$  si  $A_j$  et  $A_k$  sont dans la même sous-algèbre.

$\{S_1, S_2\}$  est une partition de  $\{1, \dots, n\}$ . Si  $\{\pi_1, \pi_2\}$  est une paire de partitions de  $S_1$  et  $S_2$  alors  $\pi_1 \cup \pi_2$  est une partition de  $S_1 \cup S_2 = \{1, \dots, n\}$ . Si  $\psi_1$  et  $\psi_2$  sont deux familles de formes  $n$ -linéaires (on a omit la dépendance en  $n$ ), on définit

$$\psi_1 \cup \psi_2[\pi_1 \cup \pi_2](A_1, \dots, A_n) = \prod_{V \in \pi_1} \psi_1(A_V) \prod_{V \in \pi_2} \psi_2(A_V).$$

Si  $\pi \in NC(S_1)$ , notons  $\pi^c$  son complémentaire dans  $NC(n)$ . C'est une partition non croisée de  $S_2$  telle que  $\pi \cup \pi^c$  est non croisée.

On a

$$\tau(A_1, \dots, A_n) = \sum_{\pi \in NC(n)} R[\pi](A_1, \dots, A_n).$$

Dans cette somme ne survivent que les termes qui ne font intervenir que des facteurs dans lesquels les variables présentes sont de la même sous-algèbre. C'est une conséquence de la proposition 7 (les autres termes s'annulent). Donc, les partitions qui survivent sont de la forme  $\pi_1 \cup \pi_2$ .

$$\tau(A_1, \dots, A_n) = \sum_{\pi_1 \in NC(S_1)} \sum_{\substack{\pi_1 \in NC(S_1) \\ \pi_1 \cup \pi_2 \in NC(n)}} R \cup R[\pi_1 \cup \pi_2](A_1, \dots, A_n).$$

Or,  $\{\pi_2 \in NC(S_2), \pi_1 \cup \pi_2 \in NC(n)\} = \{\pi_2 \in NC(S_2), \pi_2 \leq \pi_1^c\}$ . Donc,

$$\tau(A_1, \dots, A_n) = \sum_{\pi_1 \in NC(S_1)} R \cup \tau[\pi_1 \cup \pi_1^c](A_1, \dots, A_n).$$

C'est cette dernière égalité que nous utiliserons.

## 5.5 Approche analytique : convolution multiplicative libre

En probabilités classiques la distribution d'un couple de variables aléatoires indépendantes  $(X, Y)$  ne dépend que de  $\mu$ , la loi de  $X$  et  $\nu$ , la loi de  $Y$ . La donnée des trois informations suivantes :

1.  $\mu$  est la loi de  $X$
2.  $\nu$  est la loi de  $Y$
3.  $X$  et  $Y$  sont indépendants

suffit à déterminer la loi du couple  $(X, Y)$ . Dans ce cas, la loi de  $X + Y$  ne dépend que de  $\mu$  et  $\nu$  et il existe donc une opération qui permet, à partir de  $\mu$  et  $\nu$  de déterminer la loi de  $X + Y$ , c'est la convolution. La convoluée de  $\mu$  et  $\nu$  ne dépend pas de l'espace où sont définis  $X$  et  $Y$ . De plus, la fonction génératrice des moments linéarise la convoluée de  $\mu$  et  $\nu$ .

On retrouve ces propriétés en probabilités libres. Par exemple, si  $U$  et  $V$  sont deux éléments unitaires et libres de  $\mathcal{A}$ , de distributions respectives  $\mu$  et  $\nu$  (ce sont des mesure de probabilité sur  $\mathbf{T}$ ) alors la distribution de  $UV$  ne dépend que de  $\mu$  et  $\nu$  (et pas de la relation qu'il y a entre  $U$  et  $V$ , à part la liberté, ni de l'espace où ces variables aléatoires non commutatives sont définis). Il existe une opération qui permet de passer de  $\mu, \nu$  à la distribution de  $UV$ , c'est la convolution multiplicative libre. La convolution multiplicative libre est une opération entre mesures de probabilité sur  $\mathbf{T}$  et est notée  $\boxtimes$ . La loi de  $UV$  est donc  $\mu \boxtimes \nu$ .

Si  $\mu$  est une mesure de probabilité sur  $T$  on définit sa fonction- $\psi$  par

$$\psi_\mu(z) = \int_{\mathbf{T}} \frac{z\xi}{1 - z\xi} d\mu(\xi).$$

C'est la somme d'une série entière sur  $\mathbf{D}$ , le disque unité ouvert de  $\mathbf{C}$ , et elle vaut 0 en 0.

Soit  $\mathcal{M}^*$  l'ensemble des mesures de probabilité  $\mu$  sur  $\mathbf{T}$  de moyenne non nulle:  $\int_{\mathbf{T}} \xi d\mu(\xi) \neq 0$ . Si  $\mu \in \mathcal{M}^*$ , la fonction  $\frac{\psi_\mu}{1 + \psi_\mu}$  admet un inverse à droite appelé  $\chi_\mu$  défini au voisinage de 0, nulle en 0, et on appelle  $\Sigma_\mu(z) = \frac{1}{z}\chi_\mu(z)$  la  $\Sigma$ -transformée de  $\mu$ . La  $\Sigma$ -transformée joue le rôle de la fonction génératrice des moments pour les sommes de variables aléatoires indépendantes. En effet, si  $\mu, \nu \in \mathcal{M}^*$ , alors  $\mu \boxtimes \nu \in \mathcal{M}^*$  et

$$\Sigma_{\mu \boxtimes \nu} = \Sigma_\mu \Sigma_\nu,$$

sur un voisinage de 0 où ces trois fonctions sont définies.

## Chapter 6

# Processus à accroissements libres

En probabilités classiques, un processus stochastique est une famille de variables aléatoires indexée par  $\mathbf{R}_+$ . Les processus à accroissement indépendants sont une classe de processus largement étudiés à cause de leurs propriétés remarquables et parce qu'on les rencontre fréquemment. Notamment, le mouvement brownien est un processus à accroissement indépendants. Plus généralement, les processus de Levy sont des processus à accroissements indépendants. A partir d'un processus à accroissement indépendant, on peut opérer des transformations simples qui le transforme en martingale.

En probabilités libres, un processus est une famille de variables aléatoires non commutatives indexée par  $\mathbf{R}_+$ . Vu l'importance des processus à accroissements indépendants en probabilités classiques, la question des processus à accroissements libres est naturelle en probabilités libres. Elle est d'autant plus importante qu'elle fait intervenir de manière primordiale la notion de liberté entre des variables aléatoires. Nous allons pouvoir utiliser les outils introduits dans les chapitres précédents pour étudier les processus à accroissements libres, en reprenant [1]. Précisons tout d'abord le cadre de cette étude.

### 6.1 Résultat fondamental

Le théorème fondamental de cet article est un calcul d'espérance conditionnelle. Il y a trois versions du théorème ; en continuant sur notre lancée, nous nous concentrons sur la version qui fait intervenir les opérateurs unitaires. Cette version est succinctement démontrée dans [1] mais l'auteur démontre intégralement une version similaire (celle qui concerne une somme d'opérateurs hermitiens).

Ce calcul d'espérance conditionnelle mêle les trois aspects importants des probabilités libres : analyse fonctionnelle, analyse complexe et combinatoire.

L'analogue classique du théorème qui suit serait la propriété : Pour toutes variables aléatoires  $U$  et  $V$  à valeurs dans  $\mathbf{T}$ , pour toute fonction  $f$  borélienne bornée sur  $\mathbf{T}$ , si  $\mathcal{F}$  est une tribu telle que  $U$  est  $\mathcal{F}$ -mesurable et si  $V$  est indépendante de  $\mathcal{F}$ , alors,

$$\mathbf{E}(f(UV)|\mathcal{F}) = \int_{\mathbf{T}} f(Uv)d\nu(v),$$

où  $\nu$  désigne la loi de  $V$ .

**Théorème 8** Soient  $(\mathcal{A}, \tau)$  un espace de probabilité non commutatif,  $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$  une sous-algèbre de Von Neumann de  $\mathcal{A}$ , et  $U, V \in \mathcal{A}$  ayant pour loi respectivement  $\mu$  et  $\nu$ . On suppose que  $V$  et  $\mathcal{B}$  sont libres et que  $U \in \mathcal{B}$ . Alors, il existe un noyau de Markov Feller  $\mathcal{K} = k(\xi, d\omega)$  sur  $\mathbf{T} \times \mathbf{T}$  et une fonction holomorphe  $F$  sur le disque unité ouvert de  $\mathbf{C}$  noté  $\mathbf{D}$  tels que :

1. Pour toute fonction borélienne bornée  $f$  sur  $\mathbf{T}$ ,

$$\tau(f(UV)|\mathcal{B}) = \mathcal{K}f(U)$$

$$\text{où l'on note } \mathcal{K}f(\xi) = \int_{\mathbf{T}} f(\omega)k(\xi, d\omega)$$

2.  $\forall z \in \mathbf{D}, |F(z)| \leq |z|$

3.  $\forall z \in \mathbf{D}$ ,

$$\int_{\mathbf{T}} \frac{z\omega}{1-z\omega} k(\xi, d\omega) = \frac{F(z)\xi}{1-F(z)\xi}$$

4.  $\forall z \in \mathbf{D}$ ,

$$\psi_{\mu}(F(z)) = \psi_{\mu \boxtimes \nu}(z).$$

Enfin, si  $\mu$  n'est pas de moyenne nulle sur  $\mathbf{T}$ , alors la fonction  $F$  est entièrement déterminée par les propriétés 2 et 4.

**Preuve** Soit  $z \in \mathbf{D}$ . Soit  $f$  la fonction qui intervient dans la propriété 3,

$$f : \omega \mapsto \frac{z\omega}{1-z\omega}.$$

Elle est continue sur  $\mathbf{T}$  car  $|z| < 1$ . Pour montrer la propriété 1, on commence par évaluer  $\tau(f(UV)|\mathcal{B})$  en montrant le résultat suivant.

**Proposition 9** Il existe une fonction holomorphe  $F$  définie sur le disque ouvert de rayon  $4^{-3}$ ,  $D(0, 4^{-3}) = \{z \in \mathbf{C}, |z| < 4^{-3}\}$  telle que

$$\tau(zUV(1-zUV)^{-1}|\mathcal{B}) = F(z)U(1-F(z)U)^{-1}$$

dans ce disque.

Soit  $z \in \mathbf{C}$  tel que  $|z| < 4^{-3}$ . Tout d'abord,  $zUV(1-zUV)^{-1} = \sum_{k \geq 1} (zUV)^k$  où la convergence a lieu en norme puisque  $|zUV| \leq |z||U||V| = |z| < 1$ . Comme  $\tau(\cdot|\mathcal{B})$  est une contraction on a

$$0 \leq |\tau((zUV)^k|\mathcal{B})| \leq |(zUV)^k| \leq |zUV|^k \leq |z|^k$$

et donc,

$$\tau(zUV(1-zUV)^{-1}|\mathcal{B}) = \sum_{k \geq 1} \tau((zUV)^k|\mathcal{B}) = \sum_{k \geq 1} z^k U \tau(VUV \dots UV|\mathcal{B})$$

car  $U \in \mathcal{B}$ .

Soit  $k \geq 1$ , calculons  $\tau(V(UV)^{k-1}|\mathcal{B}) = \tau(VUV\dots UV|\mathcal{B})$ . Soit  $H \in \mathcal{B}$ . On utilise les arguments combinatoires précédents pour calculer  $\tau(V(UV)^k H)$ . Soit, donc,  $S_1$  la liste des indices qui correspondent à la position des facteurs égaux à  $V$  dans le produit  $V(UV)^k H$  et  $S_2$  la liste des indices qui correspondent à la position des facteurs dans  $\mathcal{B}$ . On a  $S_1 = \{1, 3, \dots, 2k-1\}$  et  $S_2 = \{2, 4, \dots, 2k\}$ . Notons  $n = 2k$  et

$$K_1 : NC(S_1) \longrightarrow NC(S_2) \\ \pi \longmapsto \pi^c = \sup\{p \in NC(S_2), \pi \cup p \in NC(n)\}$$

ainsi que  $K_2$  comme précédemment.

$$\forall \pi \in NC(S_1), K_1 K_2(\pi) = \pi.$$

Donc,

$$\begin{aligned} \tau(V(UV)^k H) &= \sum_{\pi_1 \in NC(S_1)} R \cup \tau[\pi_1 \cup \pi_1^c](VU\dots VUVH) \\ &= \sum_{\pi_2 \in NC(S_2)} R \cup \tau[\pi_2^c \cup \pi_2](VU\dots VUVH). \end{aligned}$$

On décompose cette somme selon le bloc qui contient  $n = 2k$ , en le notant  $\{l_1, \dots, l_r\}$ ,  $r$  étant le nombre d'éléments du bloc.

$$\tau(V(UV)^k H) = \sum_{r=1}^k \sum_{\substack{0 < l_1 < \dots < l_r \\ l_r = n \\ l_j \in S_2}} \sum_{\substack{\pi_2 \in NC(S_2) \\ \{l_1, \dots, l_r\} \in \pi_2}} R \cup \tau[\pi_2^c \cup \pi_2](VU\dots VUVH).$$

Soit  $l = \{l_1, \dots, l_r\}$ ,  $0 < l_1 < \dots < l_r$ ,  $l_r = n$ ,  $l_j \in S_2$ . Une partition non croisée  $\pi_2$  de  $S_2$  dont l'un des blocs est  $l$  induit, par restriction aux ensembles  $E_j = \{l_{j-1} + 2, \dots, l_j - 2\} \subset S_2$  pour  $j$  allant de 1 à  $r$  (où l'on a noté  $l_0 = 0$ ), des partitions non croisées  $\sigma_j \in NC(E_j)$ . Réciproquement, étant données des partitions  $\sigma_j \in NC(E_j)$ ,  $j = 1, \dots, r$  on peut construire une et une seule partition  $\pi_2 \in NC(S_2)$  qui admet  $l$  pour bloc et induit les  $\sigma_j$  par restriction. C'est la partition qui a pour blocs ceux des  $\sigma_j$  et  $l$  (on vérifie qu'elle est non croisée).

Notons  $F_j = \{l_{j-1} + 1, \dots, l_j - 1\} \subset S_1$ . Pour une partition  $\sigma \in NC(E_j)$  on étend la notion de partition complémentaire dans  $E_j \cup F_j = \{l_{j-1} + 1, \dots, l_j - 1\}$ . Comme précédemment,  $\sigma^c \in NC(F_j)$  est obtenue en reliant le maximum de points de  $F_j$  sans créer de croisement avec  $\sigma$ . De ce fait, la partition  $\pi_2^c$  est la partition dont les blocs sont ceux des  $\sigma_j^c$ . Enfin  $T_2(l_j - l_{j-1}) = \{2, 4, \dots, l_j - l_{j-1} - 2\} \simeq E_j$ ,  $T_1(l_j - l_{j-1}) = \{1, 3, \dots, l_j - l_{j-1} - 1\} \simeq F_j$  donc  $NC(E_j) \simeq NC(T_2(l_j - l_{j-1}))$  et  $NC(F_j) \simeq NC(T_1(l_j - l_{j-1}))$  d'où

$$\begin{aligned} &\tau(V(UV)^k H) \\ &= \sum_{r=1}^k \sum_{\substack{0 < l_1 < \dots < l_r \\ l_r = n \\ l_j \in S_2}} \sum_{\substack{\sigma_1, \dots, \sigma_r \\ \sigma_j \in NC(T_2(l_j - l_{j-1}))}} \tau(U^{r-1} H) \times \prod_{j=1}^r R \cup \tau[\sigma_j^c \cup \sigma_j](VU\dots VUV), \end{aligned}$$

le facteur  $\tau(U^{r-1}H)$  correspondant au bloc  $\{l_1, \dots, l_r\}$ .  $U \in \mathcal{B}$ , par linéarité de  $\tau$  cette expression vaut

$$\tau \left( \sum_{r=1}^k \left( \sum_{\substack{0 < l_1 < \dots < l_r \\ l_r = n \\ l_j \in \mathcal{S}_2}} \sum_{\substack{\sigma_1, \dots, \sigma_r \\ \sigma_j \in NC(T_2(l_j - l_{j-1}))}} \prod_{j=1}^r R \cup \tau[\sigma_j^c \cup \sigma_j](VU \dots VUV) \right) U^{r-1} H \right)$$

donc  $\tau(V(UV)^{k-1}|\mathcal{B})$  vaut

$$\sum_{r=1}^k \sum_{\substack{0 < l_1 < \dots < l_r \\ l_r = n \\ l_j \in \mathcal{S}_2}} \sum_{\substack{\sigma_1, \dots, \sigma_r \\ \sigma_j \in NC(T_2(l_j - l_{j-1}))}} \prod_{j=1}^r R \cup \tau[\sigma_j^c \cup \sigma_j](VU \dots VUV) U^{r-1}.$$

En utilisant les inégalités vérifiées par  $\tau$  et  $R$ ,

$$\left| \prod_{j=1}^r R \cup \tau[\sigma_j^c \cup \sigma_j](VU \dots VUV) U^{r-1} \right| \leq 4^{2k} |U|^{k-1} |V|^k = 4^{2k}.$$

Pour tout  $z \in \mathbf{C}$ ,

$$\begin{aligned} & |z^k \tau((UV)^k |\mathcal{B})| \\ &= \left| \sum_{r=1}^k \underbrace{\sum_{\substack{0 < l_1 < \dots < l_r \\ l_r = n \\ l_j \in \mathcal{S}_2}} \sum_{\substack{\sigma_1, \dots, \sigma_r \\ \sigma_j \in NC(T_2(l_j - l_{j-1}))}} z^k \prod_{j=1}^r R \cup \tau[\sigma_j^c \cup \sigma_j](VU \dots VUV) U^r}_{\sum_{\pi_2 \in NC(\mathcal{S}_2)}} \right| \\ &\leq \sum_{r=1}^k \left| \sum_{\substack{0 < l_1 < \dots < l_r \\ l_r = n \\ l_j \in \mathcal{S}_2}} \sum_{\substack{\sigma_1, \dots, \sigma_r \\ \sigma_j \in NC(T_2(l_j - l_{j-1}))}} z^k \prod_{j=1}^r R \cup \tau[\sigma_j^c \cup \sigma_j](VU \dots VUV) U^r \right| \\ &\leq \sum_{\pi_2 \in NC(\mathcal{S}_2)} |z^k 4^{2k}| \leq |4^3 z|^k. \end{aligned}$$

Si  $|z| < 4^{-3}$ , la série

$$\sum z^k \tau((UV)^k |\mathcal{B})$$

converge normalement et

$$\sum_{k \geq 1} \sum_{r=1}^k \left| \sum_{\substack{0 < l_1 < \dots < l_r \\ l_r = n \\ l_j \in \mathcal{S}_2}} \sum_{\substack{\sigma_1, \dots, \sigma_r \\ \sigma_j \in NC(T_2(l_j - l_{j-1}))}} z^k \prod_{j=1}^r R \cup \tau[\sigma_j^c \cup \sigma_j](VU \dots VUV) U^r \right| < \infty$$

donc par le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned}
\tau(zUV(1-zUV)^{-1}|\mathcal{B}) &= \sum_{k \geq 1} \tau((zUV)^k|\mathcal{B}) \\
&= \sum_{r \geq 1} \sum_{k \geq r} \sum_{\substack{0 < l_1 < \dots < l_r \\ l_r = n \\ l_j \in \mathcal{S}_2}} \sum_{\sigma_j \in NC(T_2(l_j - l_{j-1}))} z^k \prod_{j=1}^r R \cup \tau[\sigma_j^c \cup \sigma_j](VU \dots VUV)U^r \\
&\stackrel{\text{"}l_j - l_{j-1} = 2u_j\text{"}}{=} \sum_{r \geq 1} \sum_{k \geq r} \sum_{\substack{u_1, \dots, u_r > 0 \\ \sum u_j = k}} \sum_{\sigma_j \in NC(T_2(2u_j))} \prod_{j=1}^r z^{u_j} R \cup \tau[\sigma_j^c \cup \sigma_j](VU \dots VUV)U^r \\
&= \sum_{r \geq 1} \sum_{u_1, \dots, u_r > 0} \sum_{\sigma_j \in NC(T_2(2u_j))} \prod_{j=1}^r z^{u_j} R \cup \tau[\sigma_j^c \cup \sigma_j](VU \dots VUV)U^r \\
&= \sum_{r \geq 1} \underbrace{\left( \sum_{u > 0} \left( \sum_{\sigma \in NC(T_2(2u))} R \cup \tau[\sigma^c \cup \sigma](VU \dots VUV) \right) z^u \right)^r}_{=F(z)} U^r \\
&= \sum_{r \geq 1} F(z)^r U^r
\end{aligned}$$

où  $F$  est la somme d'une série entière en  $z \in D(0, 4^{-3})$  donc une fonction holomorphe sur l'ouvert  $D(0, 4^{-3})$ . Puisque la série converge normalement (Fubini),

$$\forall z \in D(0, 4^{-3}), \tau(zUV(1-zUV)^{-1}|\mathcal{B}) = \sum_{r \geq 1} F(z)^r U^r = F(z)U(1-F(z)U)^{-1}.$$

Soit  $z \in \mathbf{D}$ . On pose  $r = |z|$ . Le spectre de  $zUV$  est inclus dans le cercle  $C(0, r) \subset \mathbf{C}$  centré en 0 de rayon  $r$ . L'image de ce cercle par la fonction  $x \mapsto \frac{x}{1-x}$  est incluse dans le disque ouvert de diamètre  $[\frac{-r}{1+r}, \frac{r}{1-r}]$ ,  $D\left(\frac{r^2}{1-r^2}, \frac{r}{1-r^2}\right)$ . En effet pour tout  $\theta \in \mathbf{R}$ ,

$$\frac{re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}} - \frac{r^2}{1-r^2} = -\frac{r}{1-r^2} \times \frac{r+e^{i\theta}}{1+re^{i\theta}}$$

et

$$\left| \frac{r+e^{i\theta}}{1+re^{i\theta}} \right|^2 \leq 1 - \frac{1}{1+2r \cos(\theta) + r^2} < 1.$$

Donc le spectre de  $zUV(1-zUV)^{-1}$  est inclus dans  $D\left(\frac{r^2}{1-r^2}, \frac{r}{1-r^2}\right)$ . Ainsi,

$$\left| zUV(1-zUV)^{-1} - \frac{r^2}{1-r^2} 1 \right| \leq \frac{r}{1-r^2}$$

car  $zUV(1-zUV)^{-1}$  est normal. Comme l'espérance conditionnelle est une contraction,

$$\left| \tau(zUV(1-zUV)^{-1}|\mathcal{B}) - \frac{r^2}{1-r^2} \right| \leq \frac{r}{1-r^2}$$

et donc le spectre de  $\tau(zUV(1 - zUV)^{-1}|\mathcal{B})$  est inclus dans  $\overline{D}\left(\frac{r^2}{1-r^2}, \frac{r}{1-r^2}\right)$  (disque fermé). Ensuite,  $Sp(1 + \tau(zUV(1 - zUV)^{-1}|\mathcal{B})) \subset \overline{D}\left(\frac{r^2}{1-r^2} + 1, \frac{r}{1-r^2}\right)$  qui est le disque fermé de diamètre  $[\frac{1}{1+r}, \frac{1}{1-r}]$ . 0 est à l'extérieur de ce disque donc  $1 + \tau(zUV(1 - zUV)^{-1}|\mathcal{B})$  est inversible et

$$|(1 + \tau(zUV(1 - zUV)^{-1}|\mathcal{B}))^{-1}| \leq 1 + r.$$

Par un calcul similaire au précédent, l'image du disque fermé de diamètre  $[\frac{1}{1+r}, \frac{1}{1-r}]$  par  $x \mapsto 1 - \frac{1}{x}$  est incluse dans  $\overline{D}(0, r)$  donc

$$|1 - (1 + \tau(zUV(1 - zUV)^{-1}|\mathcal{B}))^{-1}| \leq r$$

et donc  $||1 - (1 + \tau(zUV(1 - zUV)^{-1}|\mathcal{B}))^{-1}|U^{-1}| \leq r$  i.e

$$Sp([1 - (1 + \tau(zUV(1 - zUV)^{-1}|\mathcal{B}))^{-1}]U^{-1}) \subset \overline{D}(0, r).$$

L'opérateur  $R(z) = [1 - (1 + \tau(zUV(1 - zUV)^{-1}|\mathcal{B}))^{-1}]U^{-1}$  définit une fonction holomorphe sur  $\mathbf{D}$  et est égal à  $F(z)1$  dès que  $z \in D(0, 4^{-3})$ . Soit  $x, y \in \mathbf{H}$  orthogonaux.  $z \mapsto (R(z)x|y)$  est une fonction holomorphe sur  $\mathbf{D}$  nulle sur un voisinage de 0 (où  $R$  est un multiple de 1) donc nulle sur  $\mathbf{D}$ . Donc,  $R$  est un multiple de 1 sur  $\mathbf{D}$ . Cela nous fournit un prolongement de  $F$  à  $\mathbf{D}$ , qui est, comme  $R$ , holomorphe puisque  $\forall z \in \mathbf{D}, R(z) = F(z)1$ . Donc

$$\forall z \in \mathbf{D}, \tau(zUV(1 - zUV)^{-1}|\mathcal{B}) = F(z)U(1 - F(z)U)^{-1}. \quad (6.1)$$

Puisque  $Sp(R(z)) \subset \overline{D}(0, |z|)$ , on a la propriété 2 pour  $F$ .

$$\forall z \in \mathbf{D}, |F(z)| \leq |z|.$$

Soit

$$G : \mathbf{T} \times \mathbf{D} \longrightarrow \mathbf{C} \\ (\omega, z) \longmapsto \frac{z\omega}{1-z\omega}.$$

$G$  est dérivable selon la deuxième variable.

A l'aide des propriétés de la trace, on vérifie qu'on a pour tout  $X \in \mathcal{A}$ ,  $\tau(X^*|\mathcal{B}) = \tau(X|\mathcal{B})^*$ . Le résultat précédent montre donc que pour tout  $z \in \mathbf{D}$ ,

$$\tau(G(UV, z)|\mathcal{B}) = G(U, F(z))$$

et

$$\tau(\overline{G}(UV, \bar{z})|\mathcal{B}) = \overline{G}(U, F(\bar{z})).$$

La continuité de  $G(UV, \cdot)$  et  $G(U, \cdot)$  sur  $\mathbf{D}$ , la linéarité et la continuité pour la norme de l'espérance conditionnelle permet de prendre les dérivées successives en  $z = 0$  et en  $\bar{z} = 0$  dans ces deux relations. Puisque  $G(\omega, z) = \sum_{k \geq 1} \omega^k z^k$ , pour tout  $z \in \mathbf{D}$ , on a

$$\forall k \geq 1, \frac{\partial^k G}{\partial z^k}(\omega, 0) = k! \times \omega^k$$

de même

$$\frac{\partial^k \overline{G}}{\partial \bar{z}^k}(\omega, 0) = k! \times \bar{\omega}^k.$$

Donc, en calculant les nombres dérivés successifs en 0 dans la relation (3.1), pour tout  $k \geq 0$ ,  $\tau((UV)^k|\mathcal{B})$  et  $\tau((UV)^{*k}|\mathcal{B})$  sont toujours dans  $C^*(U)$ , la  $C^*$ -algèbre engendrée par  $U$ . Mieux, on voit que pour tout  $k \geq 0$ ,  $\tau((UV)^k|\mathcal{B})$  est polynomial en  $U$ , de degré inférieur à  $k$ , et  $\tau((UV)^{*k}|\mathcal{B})$  est polynomial en  $U^*$ , de degré inférieur à  $k$ .

**Remarque** En fait, on pouvait déjà voir ce résultat dans la démonstration de la proposition 9. En revanche, le fait de démontrer la proposition 9 permet de montrer les points 2, 3 et 4 du théorème 8, ce qui a un intérêt en pratique pour identifier  $\mathcal{K}$ .

Par densité pour la convergence uniforme sur  $\mathbf{T}$  de l'espace vectoriel complexe engendré par les fonctions  $z \mapsto z^k$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ , par isométrie du calcul fonctionnel continu, par continuité pour la norme de  $\tau(\cdot|\mathcal{B})$ , et par fermeture pour la norme de  $C^*(U)$ , pour toute fonction complexe  $f$  continue sur  $\mathbf{T}$ ,

$$\tau(f(UV)|\mathcal{B}) \in C^*(U).$$

Par bijectivité du calcul fonctionnel continu, pour toute fonction complexe  $f$  continue sur  $\mathbf{T}$ , il existe une unique fonction complexe  $g$  continue sur  $\mathbf{T}$ , telle que

$$\tau(f(UV)|\mathcal{B}) = g(U),$$

c'est  $g = \Phi_U^{-1}(\tau(\Phi_{UV}(f)|\mathcal{B}))$  où  $\Phi_A$  désigne le calcul fonctionnel continu pour  $A$ . Notons  $\mathcal{K}$  l'opérateur sur  $C(\mathbf{T})$

$$f \mapsto \Phi_U^{-1}(\tau(\Phi_{UV}(f)|\mathcal{B})).$$

On a pour tout  $f$  continue sur  $\mathbf{T}$ ,

$$\tau(f(UV)|\mathcal{B}) = \mathcal{K}f(U).$$

Soit  $\xi \in \mathbf{T}$ .

$$f \mapsto \Phi_U^{-1}(\tau(\Phi_{UV}(f)|\mathcal{B}))(\xi)$$

est une forme linéaire positive sur  $C(\mathbf{T})$  par propriété du calcul fonctionnel continu et de  $\tau(\cdot|\mathcal{B})$ .  $\mathbf{T}$  est compact et cette forme linéaire envoie la fonction constante 1 sur 1, donc il existe une mesure de probabilité  $k(\xi, \cdot)$  qui la représente par le théorème de Riesz :

$$\forall f \in C(\mathbf{T}), \mathcal{K}f(\xi) = \int_{\mathbf{T}} f(\omega)k(\xi, d\omega).$$

Puis,

$$\tau(f(UV)|\mathcal{B}) = \int_{\mathbf{T}} f(\omega)k(U, d\omega)$$

pour tout  $f \in C(\mathbf{T})$ . Les deux membres de l'égalité précédente ont encore du sens pour  $f \in B(\mathbf{T})$ . Dans ce cas, elle sont encore égale puisqu'on peut approcher une telle  $f$  par des fonctions continues qui sont bornées par la même borne que  $f$ . On peut ensuite utiliser le théorème de convergence dominée pour le membre de droite et la continuité faible de  $\tau(\cdot|\mathcal{B})$  pour le membre de gauche pour passer à la limite. Finalement, pour tout  $f \in B(\mathbf{T})$ ,

$$\tau(f(UV)|\mathcal{B}) = \int_{\mathbf{T}} f(\omega)k(U, d\omega)$$

et

$$\Psi_U^{-1}(\tau(\Psi_{UV}(f)|\mathcal{B}))(\xi) = \int_{\mathbf{T}} f(\omega)k(\xi, d\omega)$$

où  $\Psi_A$  désigne le calcul fonctionnel mesurable pour  $A$ . Le noyau  $\mathcal{K}$  stabilise  $B(\mathbf{T})$  donc il est markovien. Il stabilise  $C(\mathbf{T})$  donc il est de Feller.

Soit  $z \in \mathbf{D}$ . Les relations

$$\tau(zUV(1 - zUV)^{-1}|\mathcal{B}) = F(z)U(1 - F(z)U)^{-1} = \int_{\mathbf{T}} \frac{z\omega}{1 - z\omega}k(U, d\omega)$$

donnent, d'une part par calcul fonctionnel

$$\forall \xi \in \mathbf{T}, \frac{F(z)\xi}{1 - F(z)\xi} = \int_{\mathbf{T}} \frac{z\omega}{1 - z\omega}k(\xi, d\omega)$$

d'autre part en prenant la trace

$$\psi_\mu(F(z)) = \psi_{\mu \boxtimes \nu}(z).$$

D'où les propriétés 3 et 4.

Si  $\mu$  n'est pas de moyenne nulle sur  $\mathbf{T}$ , c'est-à-dire si  $\mu \in \mathcal{M}^*$ ,  $\psi_\mu$  est inversible au voisinage de 0.  $F$  est donc entièrement déterminée sur ce voisinage de 0 par la relation  $\psi_\mu \circ F = \psi_{\mu \boxtimes \nu}$ . Mais  $F$  est analytique donc connaître  $F$  au voisinage de 0 équivaut à connaître  $F$  sur  $\mathbf{D}$ .

## 6.2 Application aux processus à accroissements libres

Le théorème précédent permet de montrer deux résultats sur les processus à accroissements libres. Le premier concerne une généralisation des processus de Markov dans le cas non commutatif. Le deuxième concerne un analogue pour les martingales exponentielles associées à un processus à accroissements indépendants.

Soit  $D$  une  $C^*$ -algèbre et  $\omega_0$  une forme linéaire complexe continue positive qui envoie l'unité de  $D$  sur 1. On suppose qu'on dispose d'une famille  $\Pi = (\Pi_{s,t})_{0 \leq s < t}$  de contractions complètement positives qui envoie l'unité de  $D$  sur 1,

$$\Pi_{s,t} : D \longrightarrow D.$$

On suppose de plus que  $\Pi_{s,t} \circ \Pi_{t,u} = \Pi_{s,u}$  dès que  $s < t < u$ .

**Définition** Une dilation de  $(D, \omega_0, \Pi)$  est la donnée de  $(\mathcal{A}, \tau, \mathcal{A}_t, \tau_t, j_t, t \in \mathbf{R}_+)$  telle que

1.  $(\mathcal{A}, \tau)$  est un espace de probabilité non commutatif (mais on suppose seulement que  $\tau(1) = 1$  et  $\tau(A^*A) \geq 0$  avec égalité si et seulement si  $A = 0$ ),
2.  $(\mathcal{A})_{t \geq 0}$  est une famille croissante de sous-algèbres de  $\mathcal{A}$ ,
3. Pour tout  $t \geq 0$ ,  $\tau_t : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}_{\sqcup t}$  est une espérance conditionnelle,
4. Pour tout  $t \geq 0$ ,  $j_t : D \longrightarrow \mathcal{A}_t$  est un morphisme,

5. "Condition initiale" :  $\omega_0 = \tau \circ j_0$ ,
6. "Propriété de Markov" : Pour tout  $0 \leq s < t$ ,

$$\tau_s \circ j_t = j_s \circ \Pi_{s,t}.$$

Pour comprendre cette notion, plaçons nous dans le cas où  $D$  est une  $C^*$ -algèbre commutative. Un théorème de Gelfand assure que  $D$  peut être identifiée à un  $C(K)$ , l'espace des fonctions continues sur un espace topologique compact et séparé  $K$ . Le théorème de Riesz montre alors que  $\omega_0$  peut être identifié à une mesure de probabilité de Radon  $\mu$  sur les boréliens de  $K$ .  $(K, B(K), \mu)$ , où  $B(K)$  est la tribu borélienne sur  $K$ , est un espace probabilisé et les éléments de  $C(K)$  sont des variables aléatoires sur cet espace. On suppose que les  $\Pi_{s,t}$  sont des noyaux de Markov. La relation  $\Pi_{s,t} \circ \Pi_{t,u} = \Pi_{s,u}$  est à prendre au sens du produit "matriciel" entre noyaux de Markov.

Le théorème d'extension de Kolmogorov assure qu'il existe un processus de Markov à valeurs dans  $K$ , défini sur un espace  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ , de loi initiale  $\mu$  et de noyaux de transition les  $\Pi_{s,t}$ . Le noyau  $\Pi_{s,t}$  permet de passer de l'état de la date  $s$  à l'état de la date  $t$ . Ce processus de Markov donne une dilation de  $(D, \omega_0, \Pi)$ . Pour le voir, il suffit de prendre

1.  $\mathcal{A} = L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  et  $\tau$  l'espérance  $\mathbf{E}$  sur  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ ,
2.  $\mathcal{A}_t = L^\infty(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbf{P})$  où  $\mathcal{F}_t$  est la tribu engendrée par les  $X_s, 0 \leq s \leq t$ ,
3.  $\tau_t = \mathbf{E}(\cdot | \mathcal{F}_t)$ ,
4.  $j_t : f \mapsto f(X_t)$  (en identifiant  $D$  et  $C(K)$ ).

On vérifie qu'on a alors la condition initiale :  $\int_K f d\mu = \mathbf{E}(f(X_0))$  et la propriété de Markov, pour tout  $0 \leq s < t$ ,

$$\mathbf{E}(f(X_t) | \mathcal{F}_s) = \Pi_{s,t}(f)(X_s).$$

Réciproquement, si  $(\mathcal{A}, \tau, \mathcal{A}_t, \tau_t, j_t, t \in \mathbf{R}_+)$  est une dilation de  $(D, \omega_0, \Pi)$  et  $\mathcal{A}$  est commutatif, alors  $\mathcal{A}$  et un certain  $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  sont isomorphes et il existe un processus de Markov défini sur  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  tel que la dilation soit obtenue comme précédemment.

**Remarque** Grossièrement, dans le cas commutatif, la donnée d'une dilation équivaut à la donnée d'un processus de Markov. Mais l'intérêt de la définition d'une dilation est que le cas "commutatif" n'est qu'un cas particulier de dilation. Cette définition permet d'appréhender simplement le cas non commutatif.

La donnée de la loi initiale du processus de Markov  $(X_t)_{t \geq 0}$  et de ses noyaux de transition déterminent entièrement ses lois marginales de dimension finie, c'est-à-dire les

$$\mathbf{E}(f_1(X_{t_1}) \dots f_n(X_{t_n})),$$

où  $f_1, \dots, f_n \in C(K)$  et  $0 \leq t_1 < \dots < t_n, n \geq 1$ . C'est une conséquence de la propriété de Markov (classique). Grâce à la commutativité dans  $C(K)$ , les

$$\mathbf{E}(f_1(X_{t_1}) \dots f_n(X_{t_n})),$$

où  $f_1, \dots, f_n \in C(K)$  et  $0 \leq t_1, \dots, t_n$ , deux à deux distincts, sont entièrement déterminés par la loi initiale du processus  $(X_t)_t$  et ses noyaux de transition.

Supposons maintenant que  $D$  est non commutative. Une application répétée de la propriété de Markov (point 6 de la définition précédente) à la dilation  $(\mathcal{A}, \tau, \mathcal{A}_t, \tau_t, j_t, t \in \mathbf{R}_+)$  montre que la donnée de  $\omega_0$  et de  $\Pi$  détermine entièrement les

$$\tau(j_{t_1}(f_1) \dots j_{t_n}(f_n))$$

où  $f_1, \dots, f_n \in D$  et  $0 \leq t_1 < \dots < t_n$ ,  $n \geq 1$ . Mais à cause de la non commutativité, cela ne détermine pas nécessairement les  $\tau(j_{t_1}(f_1) \dots j_{t_n}(f_n))$  où les instants  $t_j$  ne sont pas pris croissants.

### Définition

On appelle processus (unitaire) à accroissements (multiplicatifs) libres une famille de variables aléatoires non commutatives unitaire  $(U_t)_{t \geq 0}$  indexée par  $\mathbf{R}_+$  telle que les variables

$$U_{t_1}, U_{t_1}^{-1} U_{t_2}, \dots, U_{t_{n-1}}^{-1} U_{t_n}$$

sont libres, pour tout  $0 \leq t_1 < \dots < t_n$ .

Si  $(U_t)_t$  est un processus à accroissements libres, et si  $0 \leq s < t$ , on peut appliquer le théorème 8 aux variables libres  $U_s$  et  $U_s^{-1} U_t$ , et à la sous-algèbre de Von Neumann  $\mathcal{A}_s$  engendrée par les  $U_r$ ,  $0 \leq r \leq s$ . On note  $\mu_s$  la distribution de  $U_s$ ,  $\mu_{s,t}$  la distribution de  $U_s^{-1} U_t$ ,  $\mathcal{K}_{s,t}$  le noyau de Markov Feller du théorème 8 et  $F_{s,t}$  la fonction analytique du théorème 8. On a

$$\tau(f(U_t) | \mathcal{A}_s) = \mathcal{K}_{s,t} f(U_s)$$

pour toute fonction  $f$  borélienne bornée sur  $\mathbf{T}$ .

De plus, avec nos notations,

$$\mu_s \boxtimes \mu_{s,t} = \mu_t$$

et si  $0 \leq r < s < t$ ,

$$\mu_{r,s} \boxtimes \mu_{s,t} = \mu_{r,t}.$$

Avec  $j_t : f \mapsto f(U_t)$  défini sur  $C(\mathbf{T})$ ,  $\forall t \geq 0$ , on a le

**Théorème 10**  $(\mathcal{A}, \tau, \mathcal{A}_t, \tau(\cdot | \mathcal{A}_t), j_t, t \in \mathbf{R}_+)$  est une dilation de  $(C(\mathbf{T}), \mu_0, (\mathcal{K}_{s,t}))$ .

Par deux applications successives de la propriétés de Markov on a

$$\mathcal{K}_{s,t} \circ \mathcal{K}_{t,u} = \mathcal{K}_{s,u}$$

dès que  $s < t < u$ . On peut donc utiliser un théorème de Kolmogorov qui assure qu'il existe un processus de Markov  $(X_t)_{t \geq 0}$  à valeurs dans  $\mathbf{T}$  de loi initiale  $\mu_0$  et de noyaux de transition les  $\mathcal{K}_{s,t}$ ,  $s < t$ . Les noyaux de transition et la loi initiale de ce processus déterminent ses lois marginales de dimension finie de la même manière qu'ils déterminent les

$$\tau(j_{t_1}(f_1) \dots j_{t_n}(f_n))$$

où  $f_1, \dots, f_n \in D$  et  $0 \leq t_1 < \dots < t_n$ ,  $n \geq 1$ .

On a donc

**Proposition 11** Soit  $(U_t)_t$  un processus à accroissements libres. Il existe un processus de Markov  $(X_t)_t$  à valeurs dans  $\mathbf{T}$  tel que

$$\mathbf{E}(f_1(X_{t_1}) \dots f_n(X_{t_n})) = \tau(f_1(U_{t_1}) \dots f_n(U_{t_n})),$$

pour toutes  $f_1, \dots, f_n \in B(\mathbf{T})$  et  $0 \leq t_1 < \dots < t_n$ ,  $n \geq 1$ .

Un autre point important dans l'étude des processus à accroissements libres est l'existence d'analogues pour les martingales exponentielles. En effet, si  $(X_t)_{t \geq 0}$  est un processus à accroissements indépendants et si pour un  $\theta \in \mathbf{R}$ ,  $\mathbf{E}(\exp(\theta X_t)) < \infty$ , alors

$$\left( \frac{\exp(\theta X_t)}{\mathbf{E}(\exp(\theta X_t))} \right)_{t \geq 0}$$

est une martingale.

**Définition** Si  $(\mathcal{A}_t)_t$  est une famille croissante de sous-algèbres de Von Neumann de  $\mathcal{A}$ , on dit que  $(M_t)_t$  est une martingale de  $(\mathcal{A}, \tau, \mathcal{A}_t)$  si c'est une famille de variables aléatoires non commutatives indexée par un intervalle  $I$  de  $\mathbf{R}_+$  tel que

1.  $\forall t \in I, M_t \in \mathcal{A}_t$
2.  $\forall s < t \in I, \tau(M_t | \mathcal{A}_s) = M_s$

**Théorème 12** Soit  $(U_t)$  un processus à accroissements libres. On garde les notations précédentes. Supposons qu'il existe un intervalle  $I$  tel que pour tout  $t \in I$ , les  $\Sigma_{\mu_t}$  sont définis sur un même voisinage  $\Lambda$  de 0. Alors  $(z \Sigma_{\mu_t}(z) U_t (1 - z \Sigma_{\mu_t}(z) U_t)^{-1})_{t \in I}$  est une martingale, pour tout  $z \in \Lambda$

**Preuve** Si  $z \in \Lambda$ , on déduit de la propriété 4 du théorème 8 que pour tout  $s < t \in I$ ,  $F_{s,t}(\chi_{\mu_t}(z)) = \chi_{\mu_s}(z)$  et donc  $F_{s,t}(z \Sigma_{\mu_t}(z)) = z \Sigma_{\mu_s}(z)$ .

$$\tau(z \Sigma_{\mu_t}(z) U_t (1 - z \Sigma_{\mu_t}(z) U_t)^{-1} | \mathcal{A}_s) = F_{s,t}(z \Sigma_{\mu_t}(z)) U_s (1 - F_{s,t}(z \Sigma_{\mu_t}(z)) U_s),$$

par la formule de la proposition 9. Donc,

$$\tau(z \Sigma_{\mu_t}(z) U_t (1 - z \Sigma_{\mu_t}(z) U_t)^{-1} | \mathcal{A}_s) = z \Sigma_{\mu_s}(z) U_s (1 - z \Sigma_{\mu_s}(z) U_s)^{-1}.$$

### 6.3 Application aux grandes matrices aléatoires

Profitons de ce résultat pour montrer comment ces résultats peuvent s'utiliser en probabilités classiques et en statistiques. En statistiques on utilise des matrices de grande taille lorsqu'on stocke les données et que celles-ci sont de grande dimension et en grand nombre. Ce qui établit le lien entre les probabilités libres et la théorie des matrices aléatoires est un résultat de Voiculescu dans [4]. Nous allons énoncer une des conséquences de ce théorème. Soit  $\mathcal{U}(N)$  le groupe des matrices unitaires de taille  $N > 0$ . C'est un groupe et un compact de l'ensemble des matrices de taille  $N$  donc il existe une unique mesure de probabilité notée  $h$  appelée mesure de Haar invariante par translation :

$$\forall V \in \mathcal{U}(N), U \sim h \implies UV \sim h.$$

Remarquons que la mesure naturelle utilisée ici sur  $\mathbf{T} = \mathcal{U}(1)$  est en fait la mesure de Haar. Soit  $V$  une matrice unitaire de taille  $N$ . Une matrice unitaire est diagonalisable en base orthonormale et ses valeurs propres appartiennent au cercle unité de  $\mathbf{C}$ . Donc l'ensemble des matrices normales qui ont même spectre que  $V$  est l'ensemble des matrices de la forme  $UVU^*$  où  $U$  décrit  $\mathcal{U}(N)$ . On peut donc introduire la loi

$$\rho_V,$$

mesure image de la mesure de Haar sur  $\mathcal{U}(N)$  par

$$U \longmapsto UVU^*.$$

C'est une loi naturelle sur les matrices normales qui ont même spectre que  $V$  dans une base orthonormale. Notons  $\nu_1, \dots, \nu_N$  ce spectre. On introduit de plus la loi empirique  $s_V$  des valeurs propres de  $V$ ,

$$s_V = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \delta_{\nu_j}.$$

C'est une loi sur  $\mathbf{T}$ . La donnée du spectre de  $V$  (avec les multiplicités) est équivalente à la donnée de  $s_V$ .

**Théorème 13** *Soit  $N > 0$ .*

- *Soient  $U_N$  et  $V_N$  deux matrices unitaires de taille  $N$ .*
- *On suppose que les lois  $s_{U_N}$  et  $s_{V_N}$  convergent étroitement vers des lois à support compact, respectivement  $s_1$  et  $s_2$ .*
- *Soient  $(\mathcal{A}, \tau)$  un espace de probabilité non commutatif et  $u, v \in \mathcal{A}$ , unitaires, **libres**, de lois respectives  $s_1$  et  $s_2$ .*
- *Soient  $U'_N$  et  $V'_N$  deux matrices unitaires aléatoires, tirées indépendamment selon les lois  $\rho_{U_N}$  et  $\rho_{V_N}$  respectivement.*

*Alors pour tout polynôme complexe  $P$  en quatre indéterminées,*

$$\frac{1}{N} \text{tr}(P(U'_N, U'^*_N, V'_N, V'^*_N)) \longrightarrow \tau(P(u, u^*, v, v^*))$$

*en probabilité quand  $N$  tend vers l'infini.*

On peut voir  $U'_N$  et  $V'_N$  comme des éléments aléatoires de l'espace de probabilité non commutatif des matrices carrées complexes de taille  $N$ , et dire qu'en probabilité,  $(U'_N, V'_N)$  converge en distribution non commutative vers  $(u, v)$ . On peut dire que  $U'_N$  et  $V'_N$  sont asymptotiquement libres, en probabilité.

Le dernier point de [2] concerne une application de ce résultat à l'étude des grandes matrices aléatoires. Soit  $U$  et  $V$  deux matrices unitaires unitaires de même taille  $N$  et de spectre connu. En voyant la matrice  $UV$  comme une perturbation de la matrice  $U$  on voudrait connaître les vecteurs propres de  $UV$ . Notons  $e = (e_1, \dots, e_N)$  une base orthonormale de vecteurs propres de  $U$ ,  $\mu_1, \dots, \mu_N$  ses valeurs propres. Notons  $b = (b_1, \dots, b_N)$  une base orthonormale de vecteurs propres de  $UV$ ,  $\lambda_1, \dots, \lambda_N$  ses valeurs propres. On s'intéresse à la matrice de passage de  $e$  à  $b$ , la matrice dont les colonnes sont les décompositions des

vecteurs de  $b$  dans  $e$ . On note  $P$  cette matrice.  $P$  est unitaire, c'est la matrice de terme général  $(e_i, b_j)$  (le produit scalaire est sesquilinéaire à gauche). On s'intéresse plutôt à la matrice de terme général  $|(e_i, b_j)|^2$  qui est bistochastique (et même "unistochastique"). En effet, les vecteurs propres sont définis à une constante multiplicative de module 1 près. Pour étudier ce noyau, on l'évalue contre des fonctions tests. Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions continues sur  $\mathbf{T}$ . En utilisant le calcul fonctionnel continu dans la  $C^*$ -algèbre des matrices carrées complexes de taille  $N$ , on évalue

$$\sum_{1 \leq i, j \leq N} f(\lambda_i) g(\mu_j) |(e_j, b_i)|^2 = \text{tr}(f(UV)P^{-1}g(D)P) = \text{tr}(f(UV)g(U))$$

où  $D = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_N)$ .

Si la loi empirique des valeurs propres de  $U$  et de  $V$ ,  $s_U$  et  $s_V$  convergent vers  $\mu$  et  $\nu$  comme dans les hypothèses du théorème précédent, et si on tire des matrices aléatoires  $U'_N$  et  $V'_N$  comme précédemment, alors

$$\frac{1}{N} \text{tr}(P(U'_N V'_N)Q(U'_N)) \longrightarrow \tau(P(uv)Q(u))$$

en probabilité quand  $N$  tend vers l'infini, pour tout polynômes  $P, Q \in \mathbf{C}[X, \bar{X}]$  où  $u, v \in \mathcal{A}$  sont unitaires et libres de loi respectives  $\mu$  et  $\nu$ . De plus, on a, par le théorème de Stone Weierstrass et un théorème de double limite,

$$\frac{1}{N} \text{tr}(f(U'_N V'_N)g(U'_N)) \longrightarrow \tau(f(uv)g(u)),$$

en probabilités, lorsque  $N$  tend vers l'infini. En effet, soient  $\epsilon > 0$  et  $P \in \mathbf{C}[X, \bar{X}]$  un polynôme qui approche uniformément  $f$  sur le cercle unité :  $|P-f| < \frac{\epsilon}{6|g|}$ , où la norme d'une fonction continue désigne la norme uniforme sur le cercle unité. Puis, soit  $Q$  un polynôme en  $z, \bar{z}$  qui approche uniformément  $g$  sur le cercle unité  $|Q-g| < \frac{\epsilon}{6|P|}$ . Par inégalité triangulaire puis en appliquant les inégalités  $|\phi(h(a))| \leq |h(a)| \leq |h|$ , avec  $U'_N, U'_N V'_N, u, uv$  dans le rôle de  $a$ ,  $P, Q, f, g$  dans le rôle de  $h$  et  $\frac{1}{N} \text{tr}, \tau$  dans le rôle de  $\phi$ , on a

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{N} \text{tr}(f(U'_N V'_N)g(U'_N)) - \tau(f(uv)g(u)) \right| \\ & \leq \left| \frac{1}{N} \text{tr}(P(U'_N V'_N)Q(U'_N)) - \tau(P(uv)Q(u)) \right| + \frac{2\epsilon}{3} \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left( \left| \frac{1}{N} \text{tr}(f(U'_N V'_N)g(U'_N)) - \tau(f(uv)g(u)) \right| > \epsilon \right) \\ & \leq \mathbf{P} \left( \left| \frac{1}{N} \text{tr}(P(U'_N V'_N)Q(U'_N)) - \tau(P(uv)Q(u)) \right| > \frac{\epsilon}{3} \right) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned}$$

Or, avec les notations du théorème 8,

$$\tau(f(uv)g(u)) = \tau(\tau(f(uv)|\mathcal{B})g(u)) = \tau(\mathcal{K}f(u)g(u)) = \int g\mathcal{K}(f)d\mu.$$

Ainsi, le noyau  $\mathcal{K}$  est entièrement caractérisé. Notons  $s_{UV} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \delta_{\lambda_j}$ ,  
 $s_U = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \delta_{\mu_j}$ , et

$$\mathcal{K}_N(\mu_j, \cdot) = \sum_{i=1}^N |(e_j, b_i)|^2 \delta_{\lambda_i}(\cdot)$$

pour tout  $j$ . En comparant le résultat final

$$\int g \mathcal{K}(f) d\mu$$

à l'expression de départ

$$\sum_{j=1}^N \left( \sum_{i=1}^N f(\lambda_i) |(e_j, b_i)|^2 \right) g(\mu_j) = N \int g \mathcal{K}_N(f) ds_U,$$

avec  $s_U \implies \mu$ ,  $\mathcal{K}$  peut être vu comme la limite de  $\mathcal{K}_N$ .

## Chapter 7

# Analyse et réflexion sur le contexte et les outils utilisés

La démarche adoptée en probabilités libres est une démarche générale de la géométrie non commutative. En effet, en analyse classique, on étudie des fonctions qui sont définies sur des espaces commutatifs, c'est-à-dire où le produit est commutatif, typiquement  $\mathbf{R}$  ou  $\mathbf{C}$ . Par exemple, on peut s'intéresser à des fonctions mesurables sur  $\mathbf{T}$  en théorie de la mesure. En géométrie non commutative, on essaye d'étudier ces mêmes fonctions, mais définies cette fois-ci sur des espaces non commutatifs. Dans notre exemple, il faut pour cela donner un sens à  $f(U)$  lorsque  $f$  est une fonction définie initialement sur  $\mathbf{T}$  et  $U$  un élément d'un espace non commutatif. En voyant  $\mathbf{T}$  comme le groupe commutatif des opérateurs unitaires en dimension 1, on pense à définir  $f(U)$  pour  $U$  un opérateur unitaire quelconque. C'est possible et la construction du calcul fonctionnel mesurable explique cela. Cela permet de faire de la théorie de la mesure non commutative, et le bon cadre pour cela est celui des algèbres de von Neumann.

Ensuite, de la théorie de la mesure non commutative naît le calcul des probabilités non commutatives. Du fait de la non commutativité, le calcul des probabilités libres repose essentiellement sur des arguments combinatoires et des arguments d'analyse complexe. De plus, la théorie est déterministe. Elle ne s'applique pas directement à l'intuition que l'on a de ce qu'est une probabilité. Elle trouve cependant des applications spectaculaires en probabilités classiques comme expliqué précédemment. Mais les probabilités libres ont été initialement introduites par D. Voiculescu dans des problèmes de classification des algèbres d'opérateurs, l'objectif étant d'utiliser des intuitions probabilistes pour les traiter. Cette méthode n'est pas nouvelle puisque l'espérance conditionnelle dans des algèbres de von Neumann est construite dans [7] depuis le début des années 70.

Nous aurions pu toujours voir les variables aléatoires non commutatives comme des opérateurs sur un espace de Hilbert. En effet, les algèbres de von Neumann sont des sous-algèbres de  $L(\mathbf{H})$  et les  $C^*$ -algèbres se plongent comme des sous-algèbres fermées (pour la norme) de  $L(\mathbf{H})$ . Mais la définition des  $C^*$ -algèbres montrent les idées importantes utilisées, notamment la relation  $|x^*x| = |x|^2$  valable pour tout  $x$  d'une  $C^*$ -algèbre.

## Chapter 8

# Conclusion

Nous avons introduit les probabilités libres en commençant par un point de vue algébrique, pour introduire les variables aléatoires non commutatives puis d'un point de vue analytique, pour parler de liberté et de distribution d'une variable aléatoire non commutative. Cela nous permet également, comme en probabilités classiques, de transformer par des fonctions mesurables des variables aléatoires non commutatives en d'autres, grâce à la stabilité du calcul fonctionnel dans les espaces où l'étude se situe.

La relation de liberté, dont les probabilités libres se proposent de faire l'étude systématique fait intervenir des objets combinatoires appelés partitions non croisées. Leur étude a permis de calculer des moments qui font intervenir des produits de variables aléatoires non commutatives libres. L'étude de la distribution d'un produit de variables unitaires libres donne un point de vue plus analytique sur la question et nous pousse à introduire une convolution "multiplicative libre" entre deux mesures sur le cercle unité du plan complexe.

Très souvent, les textes de probabilités libres énoncent et démontrent un théorème dans le cas d'opérateurs hermitiens, et l'énoncent (sans preuve) dans le cas d'opérateurs unitaires, parce que la démonstration est similaire et laissée en exercice. Nous avons donc adapté deux résultats au cas unitaire : le théorème fondamental de [1], et le calcul de l'asymptotique d'une matrice bistochastique associée à une matrice de passage entre deux bases orthonormales de [2].

Le théorème fondamental de [1] appliqué dans des contextes où interviennent des variables libres, facilite la description des processus à accroissements libres. Il permet également de quitter le calcul stochastique libre pour calculer l'asymptotique d'une matrice bistochastique associée à une matrice de passage entre deux bases orthonormales. Nous avons illustré cela dans l'étude d'une base de vecteurs propres de matrices unitaires déformées de taille qui tend vers l'infini.

# Bibliography

- [1] P. BIANE (1998), "Processes with free increments," *Mathematische Zeitschrift*, 227, 143-174
- [2] P. BIANE (1998), "Free probability for probabilists," *Lectures on the combinatorics of free probability*, Vol. XI, 55-71, QP-PQ, XI, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2003
- [3] A. NICA ET R. SPEICHER (2006), Lectures on the Combinatorics of Free Probability, *London Mathematical Society Lecture Note Series*, Volume 335, Cambridge University Press
- [4] D. V. VOICULESCU (1991), "Limit laws for random matrices and free products," *Invent. Math.*, 104, 201-220
- [5] F. RIESZ ET B. SZ.-NAGY (1955), "Leçons d'analyse fonctionnelle," *Edition Jacques Gabay*, 3e éd.
- [6] V. S. SUNDER (1986), "An invitation to von Neumann algebras" *Universitext*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York
- [7] M. TAKESAKI (1972), "Conditional expectation in von Neumann algebra" *Journ. Funct. Anal.*, 9, 306-321